

**PRENTICE
PRACTICA**

Sistemas Eléctricos de Potencia

Problemas y ejercicios resueltos

**Antonio Gómez Expósito
José L. Martínez Ramos
José A. Rosendo Macías
Esther Romero Ramos
Jesús M. Riquelme Santos**

**Prentice
Hall**

Sistemas Eléctricos de Potencia

Problemas y ejercicios resueltos



Sistemas Eléctricos de Potencia

Problemas y ejercicios resueltos

Antonio Gómez Expósito

José L. Martínez Ramos

José A. Rosendo Macías

Esther Romero Ramos

Jesús M. Riquelme Santos

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Universidad de Sevilla



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

Z. A.: MARTÍNEZ, J. L.; ROSENDO, J. A.; ROMERO, E.
ELME, J. M.

*as Eléctricos de Potencia
mas y ejercicios resueltos*

SON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2003

ISBN: 84-205-3558-3

Materia: Electrónica 621.3

to 195 × 270

Páginas: 304

los derechos reservados.

prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción,
ción, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización
titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados
ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (*arts. 270 y sgts. Código Penal*).

DERECHOS RESERVADOS

© 2003 por PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

de Balboa, 120

MADRID

ELME, J. M.; MARTÍNEZ, J. L.; ROSENDO, J. A.; ROMERO, E., y RIQUELME, J. M.

MAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

mas y ejercicios resueltos

ISBN: 84-205-3558-3

Código legal: M.-43.258-2.002

TICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Diseño editorial:

Editor: Isabel Capella

Asesor técnico editorial: Marta Caicoya

Diseño de producción:

Corrección: José Antonio Clares

Asesor técnico: Tini Cardoso

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Distribución: COPIBOOK, S.L.

Impreso por: Lavel, S.A.

HECHO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN



Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO	ix
PRIMERA PARTE: MODELADO Y ANÁLISIS DEL SISTEMA DE POTENCIA	1
CAPÍTULO 1. CÁLCULOS EN EL SISTEMA POR UNIDAD	3
1.1. Magnitudes base en sistemas monofásicos	3
1.2. Magnitudes base en sistemas trifásicos	3
1.3. Magnitudes eléctricas en p.u. y cambio de base	4
1.4. Ventajas del escalado en p.u.	4
Problemas resueltos.	5
CAPÍTULO 2. GENERADORES SÍNCRONOS	13
2.1. Introducción	13
2.2. Modelo equivalente	14
2.3. Modos y límites de funcionamiento	15
Problemas resueltos.	16
CAPÍTULO 3. TRANSFORMADORES	25
3.1. Transformador monofásico	25
3.2. Transformador trifásico	26
3.3. Sistemas normales	27
3.4. Transformadores de tres devanados	28
3.5. Autotransformadores	29
3.6. Transformadores reguladores	29
Problemas resueltos.	30

ÍTULO 4. LÍNEAS	41
4.1. Línea de parámetros distribuidos	41
4.2. Línea sin pérdidas	42
4.3. Modelos aproximados de líneas	42
4.4. Relaciones tensión-potencia	43
4.5. Regulación de tensión y pérdidas	44
4.6. Capacidad de transporte de una línea	44
4.7. Compensación en serie	47
Problemas resueltos.	48
ÍTULO 5. FLUJO DE CARGAS	55
5.1. Formulación matemática	55
5.2. Método de Gauss-Seidel	57
5.3. Método de Newton-Raphson	57
5.4. Método desacoplado rápido (FDLF)	58
5.5. Flujo de cargas en continua	59
5.6. Ajustes a la solución	59
Problemas resueltos.	61
SEGUNDA PARTE: CONTROL DEL SISTEMA DE POTENCIA	83
ÍTULO 6. CONTROL DE FRECUENCIA	85
6.1. Introducción	85
6.2. Los elementos	86
6.3. El control de velocidad	86
6.4. El control secundario	87
Problemas resueltos.	88
ÍTULO 7. CONTROL DE TENSIONES	97
7.1. Introducción	97
7.2. Equipos utilizados en el control de tensiones	97
7.3. Estructura jerárquica del control de tensiones	98
7.4. Nivel de automatización del control de tensiones	98
7.5. Determinación de las actuaciones de control	99
Problemas resueltos.	100
TERCERA PARTE: OPERACIÓN DEL SISTEMA DE POTENCIA	121
ÍTULO 8. ESTIMACIÓN DE ESTADO	123
8.1. Formulación matemática	123
8.2. Ecuaciones Normales	124
8.3. Detección e identificación de datos erróneos	125
Problemas resueltos.	126

CAPÍTULO 9. EVALUACIÓN DE LA SEGURIDAD	141
9.1. Análisis de contingencias basado en factores de distribución	142
9.2. Factores de distribución de generadores y cargas	142
9.3. Factores de distribución de líneas y transformadores	142
9.4. Factores de distribución compensados	143
Problemas resueltos.	144
CAPÍTULO 10. PROGRAMACIÓN DE LA GENERACIÓN	161
10.1. Introducción	161
10.2. Despacho económico clásico	161
10.3. Programación de arranques y paradas de centrales térmicas	165
10.4. Coordinación hidrotérmica	166
Problemas resueltos.	169
CAPÍTULO 11. FLUJO ÓPTIMO DE CARGAS	189
11.1. Introducción	189
11.2. Ecuaciones y variables	189
11.3. Restricciones	190
11.4. Problemas de optimización	190
Problemas resueltos.	191
CUARTA PARTE: ANÁLISIS DE FALTAS Y DE ESTABILIDAD	207
CAPÍTULO 12. FALTAS SIMÉTRICAS	209
12.1. Intensidades de falta	209
12.2. Método de análisis	209
12.3. Cálculo en sistemas de gran dimensión	210
12.4. Potencia de cortocircuito	211
Problemas resueltos.	212
CAPÍTULO 13. FALTAS ASIMÉTRICAS	223
13.1. Componentes simétricas	223
13.2. Modelos en secuencias de los distintos elementos	224
13.3. Cálculo en sistemas de gran dimensión	225
13.4. Modelado de faltas	226
Problemas resueltos.	227
CAPÍTULO 14. ESTABILIDAD TRANSITORIA	263
14.1. Definición del problema: Modelo clásico	263
14.2. Criterio de las áreas	264
14.3. Ángulo crítico y tiempo crítico	265
14.4. Integración de las ecuaciones	265
14.5. Sistemas de gran dimensión	266
Problemas resueltos.	267
BIBLIOGRAFÍA	287
ÍNDICE DE MATERIAS	289

PRÓLOGO

No es preciso resaltar aquí la importancia fundamental que la resolución de problemas, junto a las prácticas de laboratorio, tienen en la enseñanza de cualquier disciplina científico-técnica. Cuantos más ejercicios de tipo práctico resuelva el alumno, mejor entenderá y sedimentará los conceptos teóricos que habitualmente se le explican en las clases magistrales, a veces de forma un tanto precipitada por la amplitud de temarios y la reducción de créditos. Por otra parte, a diferencia de las prácticas de laboratorio, que requieren costosos equipos, con horarios prefijados y en presencia de un monitor, la realización de problemas constituye una oportunidad quizá única para que el alumno desarrolle, con total flexibilidad, un trabajo absolutamente personal y activo. Esto lo saben mejor que nadie aquellos alumnos que, por diversos motivos, no pueden asistir a clase o reciben enseñanza a distancia.

Dentro del currículo de la ingeniería eléctrica, el análisis, operación y control de los sistemas de generación, transporte y distribución de energía eléctrica se enmarca tradicionalmente en una o varias asignaturas, etiquetadas de forma compacta, aunque algo ambigua, como *Sistemas Eléctricos de Potencia*. Con ligeras variaciones sobre este título, el alumno puede encontrar en el mercado alrededor de una veintena de libros, varios de ellos notablemente buenos. Salvo honrosas excepciones, estos manuales teóricos proceden del sistema universitario norteamericano, y aunque contienen numerosos problemas propuestos al final de cada capítulo, lo cierto es que la solución detallada y justificada de dichos problemas casi nunca está al alcance de los estudiantes, por lo menos de los de habla hispana. En buena medida por esta carencia, recogida reiteradamente por nuestros estudiantes en las encuestas de calidad de enseñanza que sistemáticamente realizan, tomamos la decisión de llevar a cabo este proyecto, partiendo del bagaje que supone la docencia continuada de esta materia durante los últimos veinte años.

El resultado es un volumen que ha sido dividido en cuatro partes. La primera parte empieza estudiando los componentes más importantes de los sistemas eléctricos (generadores, transformadores y líneas), obviando detalles que interesan más en el diseño de los propios dispositivos e incidiendo en su análisis adimensional o en por unidad. Esta parte termina presentando la herramienta conocida como flujo de cargas, pieza fundamental por sí misma y como bloque constitutivo de estudios posteriores más complejos.

La segunda parte se dedica al control de la frecuencia y las tensiones, en sus distintos niveles. Mientras que el control de la frecuencia es esencialmente automático y centrado en los generadores, el control de las tensiones es de naturaleza distribuida y requiere mayor intervención por parte del operador. Esto origina que los ejercicios relativos a la frecuencia sean generalmente más sistemáticos, mientras que los de control de tensiones conllevan un mayor grado de diversidad y demandan más creatividad por parte del alumno.

La tercera parte presenta los conceptos y herramientas más importantes que intervienen en la operación en régimen permanente y estable de un sistema eléctrico complejo e interconectado. Se empieza con la determinación del estado de la red y el análisis de seguridad subsiguiente, continuando con la operación óptima de los subsistemas de generación y transporte. Los ejercicios propuestos aquí se refieren tanto a la operación (corto plazo) como a la planificación de la operación (medio plazo), y presentan un grado de dificultad relativamente elevado.

Finalmente, la cuarta parte se concentra en el análisis del sistema cuando se produce alguna perturbación importante, de origen interno o externo, que lo aparta bruscamente de su régimen de trabajo normal, incluyendo estudios de faltas y estabilidad.

Cada tema contiene una colección de problemas resueltos en detalle, generalmente de dificultad progresiva, precedida por un breve compendio teórico que contiene los conceptos y ecuaciones necesarios para entender los desarrollos posteriores. Este prontuario que acompaña a cada capítulo debe ser normalmente suficiente para aquellos alumnos que han asistido previamente a las explicaciones teóricas del profesor. No obstante, siempre resulta recomendable la consulta de bibliografía adicional.

Por necesidades pedagógicas, la mayoría de problemas se refieren a pequeños sistemas de dos o tres embarrados. No obstante, se incluyen también ejercicios relativos a redes mayores, y se hace explícitamente referencia en el texto a la problemática que presenta la resolución de sistemas de gran dimensión. Generalmente, el alumno será capaz de resolver los problemas con su calculadora personal, pero en muchos casos tendrá que recurrir a herramientas numéricas más potentes, tales como Matlab, Gams, etc.

Se ha procurado utilizar la notación más estándar posible, reservándose las letras caligráficas \mathcal{V} (o \mathcal{U}) e \mathcal{I} para denotar los fasores tensión e intensidad, y \mathcal{S} , \mathcal{Z} e \mathcal{Y} para representar a las magnitudes complejas respectivas.

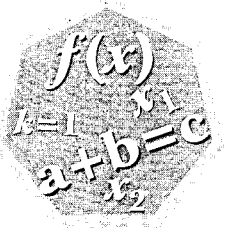
Queremos dedicar este libro a nuestras familias, que, como ocurre habitualmente en estos casos, han sufrido estoicamente los inconvenientes de nuestra intensiva dedicación a la consecución de este proyecto.

Los autores

Parte I

**MODELADO Y ANÁLISIS DEL
SISTEMA DE POTENCIA**

CÁLCULOS EN EL SISTEMA POR UNIDAD



Una fase previa en los análisis de los sistemas eléctricos de potencia es el adimensionamiento y normalización de todas las magnitudes eléctricas y parámetros del sistema. Este escalado se realiza dividiendo el valor de la variable por un valor base o de referencia, pasando así de valores de las magnitudes en unidades físicas a valores en tanto por uno o “por unidad” (p.u.).

$$\text{valor}_{p.u.} = \frac{\text{valor de la variable}}{\text{valor base}} \quad (1.1)$$

Estos valores base, que se hacen coincidir con los valores nominales en la medida de lo posible, son los módulos de las magnitudes eléctricas principales: U_B , I_B , S_B , Z_B .

No todos los valores base son independientes entre sí, sino que están relacionados a través de las ecuaciones eléctricas básicas. Estas ecuaciones hacen que sólo dos valores de referencia puedan ser fijados libremente, quedando el resto determinados por éstos. Por regla general, se suelen tomar como magnitudes base la tensión en un punto del sistema y una potencia base común a todo el sistema (U_B y S_B).

1.1. MAGNITUDES BASE EN SISTEMAS MONOFÁSICOS

Dadas la tensión y potencia base monofásicas, U_{B_1}, S_{B_1} , el resto de las magnitudes base se hallan a partir de las siguientes relaciones:

$$I_{B_1} = \frac{S_{B_1}}{U_{B_1}} \quad (1.2)$$

$$Z_{B_1} = \frac{U_{B_1}^2}{S_{B_1}} \quad (1.3)$$

1.2. MAGNITUDES BASE EN SISTEMAS TRIFÁSICOS

Las magnitudes base en un sistema trifásico se obtienen de forma similar a las de un sistema monofásico. Se adopta como tensión base la tensión de línea en un punto del sistema y como potencia base una

potencia trifásica común para todo el sistema: U_B y S_B . La intensidad base de línea y la impedancia base se obtienen de las ecuaciones:

$$I_B = \frac{S_B}{U_B \sqrt{3}} \quad (1.4)$$

$$Z_B = \frac{U_B^2}{S_B} \quad (1.5)$$

Una de las ventajas de trabajar en p.u. en sistemas trifásicos equilibrados es que las magnitudes de fase y de línea coinciden en p.u. cuando se adoptan como magnitudes base monofásicas las siguientes:

$$U_{B_1} = \frac{U_B}{\sqrt{3}}, \quad S_{B_1} = \frac{S_B}{3}, \quad I_{B_1} = I_B \quad (1.6)$$

Dado un circuito eléctrico con valores dimensionales, convertirlo en un circuito adimensional con valores en p.u. consiste simplemente en dividir cada magnitud por su valor base,

$$u[V] \leftrightarrow u_{pu} = \frac{u}{U_{Base}} \quad (1.7)$$

$$j[A] \leftrightarrow j_{pu} = \frac{j}{I_{Base}} \quad (1.8)$$

$$z[\Omega] \leftrightarrow z_{pu} = \frac{z}{Z_{Base}} \quad (1.9)$$

Si en este circuito existen transformadores, se deben establecer tantas tensiones base como zonas eléctricas establezcan los transformadores. Estas tensiones base se hallan a partir de la relación de transformación de los transformadores, es decir,

$$U_B^P = r_t U_B^S \quad (1.10)$$

siendo r_t la relación de transformación e indicando los superíndices “P” y “S” primario y secundario respectivamente.

Con estas tensiones base se consigue eliminar la relación de transformación en el sistema en p.u. y con ello la necesidad de distinguir entre las distintas áreas con diferentes niveles de tensión.

El cambio de base será necesario aplicarlo cuando las impedancias de las máquinas se expresan en p.u. (o %) respecto a los valores nominales de la propia máquina. Ante estas circunstancias se deben unificar las bases. Así, dado z_{pu} en la base definida por U_B y S_B , se obtiene z'_{pu} en la base definida por U'_B y S'_B mediante:

$$z'_{pu} = z_{pu} \frac{U_B^2}{S_B} \frac{S'_B}{(U'_B)^2} \quad (1.11)$$

La realización del análisis de los sistemas eléctricos en p.u. presenta notables ventajas, entre las que se pueden destacar las siguientes:

- Simplifica los cálculos manuales y reduce los errores computacionales.
- Valores acotados, con lo que los errores se hacen más evidentes.
- Las relaciones de transformación desaparecen del problema.
- No es necesario distinguir entre magnitudes de fase y de línea.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 1.1. En el circuito de la Figura 1.1, la tensión en el nudo de generación es de 13.2 kV, y las características de placa de los transformadores son las indicadas en la Tabla 1.1.

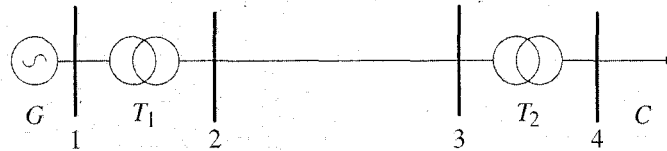


Figura 1.1 Esquema unifilar de la red del Problema 1.1.

Transformador	Conexión y tensiones en kV	S_B MVA	X %
T1	$\Delta - Y$ 13.2/132	5	10
T2	Y - Δ 138/69	10	8

Tabla 1.1 Datos nominales de los transformadores de la Figura 1.1.

Sabiendo que la impedancia de la línea es $Z_L = 10 + 100j \Omega$, y la de la carga $Z_C = 300 \Omega$, determinar las intensidades en toda la red, la tensión en la carga y la potencia consumida por ésta.

Resolución

Puesto que no son conocidos, no se tendrán en cuenta los desfases horarios que introducen los transformadores.

Para la resolución del problema se adoptará una potencia base de valor $S_B = 10$ MVA (común a toda la red) y una tensión base en la zona de la línea $V_{BL} = 138$ kV. Utilizando la relación de transformación de los trafos en aras a conseguir que éstos no aparezcan en el cálculo en p.u., es posible distinguir en la red bajo estudio tres zonas con diferentes tensiones base. Estas zonas se muestran en la Figura 1.2.

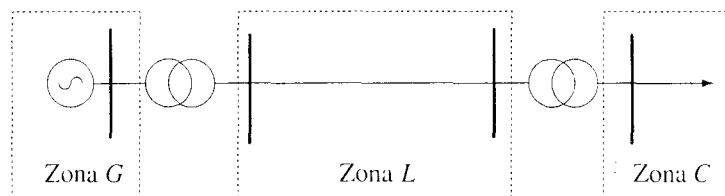


Figura 1.2 Áreas de tensión en la red del Problema 1.1.

De esta forma, las tensiones base para las zonas G y C son:

$$V_{BG} = \frac{13.2}{132} V_{BL} = 13.8 \text{ kV} \quad (1.12)$$

$$V_{BC} = \frac{69}{138} V_{BL} = 69 \text{ kV} \quad (1.13)$$

Las impedancias base de cada zona, definidas las distintas tensiones base y la potencia base, son:

$$Z_{BG} = \frac{V_{BG}^2}{S_B} = 19.044 \Omega \quad (1.14)$$

$$Z_{BL} = \frac{V_{BL}^2}{S_B} = 1904.4 \Omega \quad (1.15)$$

$$Z_{BC} = \frac{V_{BC}^2}{S_B} = 476.1 \Omega \quad (1.16)$$

y las intensidades base resultan igualmente las siguientes,

$$I_{BG} = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_{BG}} = 0.418 \text{ kA} \quad (1.17)$$

$$I_{BL} = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_{BL}} = 0.042 \text{ kA} \quad (1.18)$$

$$I_{BC} = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_{BC}} = 0.084 \text{ kA} \quad (1.19)$$

Definidas las magnitudes base para cada zona se procede a transformar los datos de la red en p.u.:

- Impedancia de línea:

$$\underline{z}_L = \frac{10 + 100j}{Z_{BL}} = 0.00525 + 0.053j$$

- Impedancia de carga:

$$\underline{z}_C = \frac{300}{Z_{BC}} = 0.63$$

- Reactancia de cortocircuito de $T1$:

$$X_{T1} = 0.1 \frac{13.2^2}{5} \frac{1}{Z_{BG}} = 0.183$$

- La reactancia de cortocircuito de $T2$ no cambia:

$$X_{T2} = 0.08 \frac{69^2}{10} \frac{1}{Z_{BC}} = 0.08$$

- Tensión en el embarrado 1:

$$V_1 = \frac{13.2}{V_{BG}} = 0.957$$

Tomando como origen de ángulos la tensión a la salida del generador, nudo 1, con la segunda ley de Kirchoff se deduce la intensidad que circula por la red:

$$\underline{u}_1 = (X_{T1}j + \underline{z}_L + X_{T2}j + \underline{z}_C)\underline{J} \quad (1.20)$$

$$0.957 \underline{1}_0 = (0.635 + 0.315j)\underline{J} \implies \underline{J} = 1.348 \underline{\angle -26.407} \quad (1.21)$$

Con la intensidad se deduce la potencia y tensión en la carga:

$$\underline{u}_4 = \underline{z}_C \underline{J} = 0.85 \underline{\angle -26.407} \quad (1.22)$$

$$S_4 = \underline{u}_4 \underline{J}^* = 1.146 \quad (1.23)$$

En valores reales se tendría:

- Intensidad por el generador:

$$I = 1.348 I_{BG} = 0.564 \text{ kA}$$

- Intensidad por la línea:

$$I = 1.348 I_{BL} = 0.056 \text{ kA}$$

- Intensidad por la carga:

$$I = 1.348 I_{BC} = 0.113 \text{ kA}$$

- Tensión en la carga:

$$V_4 = 0.85 V_{BC} = 58.625 \text{ kV}$$

- Potencia en la carga:

$$P_4 = 1.146 S_B = 11.456 \text{ MW}$$

- 1.2. Obtener el diagrama en p.u. del circuito de la Figura 1.3 tomando en las líneas una potencia y tensión base de valor 100 MVA y 220 kV respectivamente. Las características y valores nominales para cada uno de los elementos de la red se indican en la Tabla 1.2. Además, se sabe que en el nudo 4 se consumen 50 Mvar y 0 MW, y en el nudo 6 se consumen 0 Mvar y 50 MW.

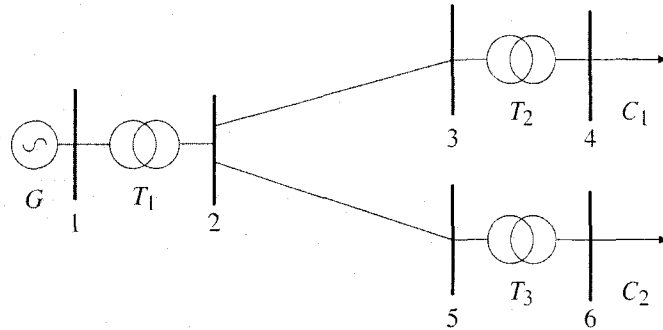


Figura 1.3 Esquema unifilar de la red del Problema 1.2.

Elemento	V_{nom} (kV)	S_{nom} (MVA)	Impedancia
Generador	24	200	$X_G = 100\%$
T1	25/230	200	$X_{CC} = 10\%$
T2	220/132	150	$X_{CC} = 10\%$
T3	220/66	75	$X_{CC} = 8\%$
Línea 2-3	-	-	$Z = 10 + 60j (\Omega)$
Línea 2-5	-	-	$Z = 50j (\Omega)$

Tabla 1.2 Datos de la red de la Figura 1.3.

Si la tensión en la barra 2 es de 231 kV, determinar la potencia activa que cede el generador y las tensiones en las cargas.

Resolución

De acuerdo con los diferentes niveles de tensión existentes en la red bajo estudio, es posible distinguir cuatro bases distintas de tensiones buscando conseguir de nuevo una relación de transformación 1:1 de los equipos transformadores en el análisis en p.u. Cada una de estas bases corresponde a las zonas indicadas en la Figura 1.4, siendo las tensiones e impedancias base en cada área, con una potencia base común a todas de $S_B = 100$ MVA, las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{Zona L:} \quad V_{BL} &= 220 \text{ kV} & \implies Z_{BL} &= 220^2/100 = 484 \Omega \\
 \text{Zona G:} \quad V_{BG} &= 220 \frac{25}{230} = 23.913 \text{ kV} & \implies Z_{BG} &= \frac{23.913^2}{100} = 5.718 \Omega \\
 \text{Zona } C_1: \quad V_{BC1} &= 220 \frac{132}{220} = 132 \text{ kV} & \implies Z_{BC1} &= \frac{132^2}{100} = 174.24 \Omega \\
 \text{Zona } C_2: \quad V_{BC2} &= 220 \frac{66}{220} = 66 \text{ kV} & \implies Z_{BC2} &= \frac{66^2}{100} = 43.56 \Omega
 \end{aligned}$$

Definidas las magnitudes base, los datos de la red en p.u. son:

- Impedancia de las líneas:

$$z_{23} = \frac{10 + 60j}{Z_{BL}} = 0.021 + 0.124j; \quad z_{25} = \frac{50j}{Z_{BL}} = 0.103j$$

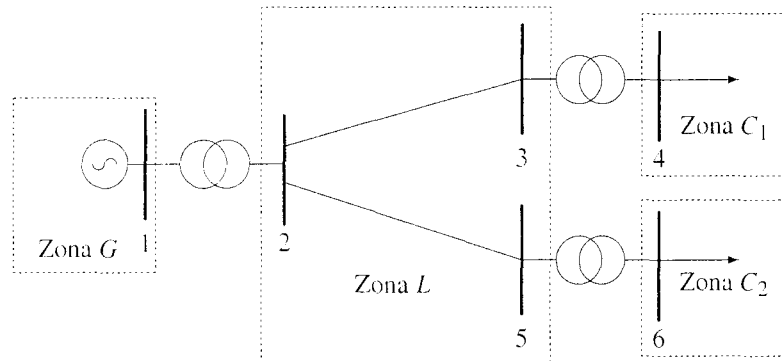


Figura 1.4 Áreas de tensión en la red del Problema 1.2.

- Impedancia del generador:

$$X_G = 1 \frac{24^2/200}{Z_{BG}} = 0.504$$

- Reactancia de cortocircuito de los transformadores:

$$X_{T1} = 0.1 \frac{25^2/200}{Z_{BG}} = 0.055$$

$$X_{T2} = 0.1 \frac{220^2/150}{Z_{BL}} = 0.067$$

$$X_{T3} = 0.08 \frac{66^2/75}{Z_{BC2}} = 0.107$$

- Potencias en las cargas:

$$S_{C1} = \frac{50j}{S_B} = 0.5j; \quad S_{C2} = \frac{50}{S_B} = 0.5$$

Tomando como origen de ángulos la tensión en el nudo 4, y conocida la tensión en el nudo 2, $V_2 = 231 \text{ kV} = 1.05$, con la segunda ley de Kirchhoff entre los nudos 2 y 4 se obtiene:

$$u_2 = (Z_{23} + j X_{T2}) J_{C1} + u_4$$

pudiendo relacionar J_{C1} con la carga y tensión en el nudo 4,

$$J_{C1} = \left(\frac{0.5j}{u_4} \right)^*$$

Sustituyendo esta última ecuación en la primera planteada se obtienen dos ecuaciones reales:

$$1.05 V_4 \cos(\theta_2) = V_4^2 + 0.095; \quad 1.05 V_4 \sin(\theta_2) = -0.0103$$

Combinándolas para eliminar los ángulos se obtiene la tensión, para posteriormente volver a una de ellas y obtener el ángulo. El resultado final es:

$$u_4 = 0.95 \angle 0; \quad u_2 = 1.05 \angle -0.594$$

De forma análoga puede obtenerse la tensión en el nudo 6, si bien resulta más directo aplicar las ecuaciones que relacionan las potencias activa y reactiva en dicho nudo con la tensión en el mismo y en el lado opuesto 2 (dado que entre estos nudos no existe resistencia, simplificándose así el cálculo):

$$P_6 = 0.5 = \frac{1.05 V_6}{(X_{25} + X_{T3})} \sin \theta_{26}$$

$$Q_6 = 0 = \frac{1.05 V_6}{(X_{25} + X_{T3})} \cos \theta_{26} - \frac{V_6^2}{(X_{25} + X_{T3})}$$

De estas ecuaciones resulta $u_6 = 1.048 \angle -3.55$.

Es de destacar, a raíz de los resultados obtenidos, el fuerte acoplamiento entre la potencia activa y el ángulo de las tensiones, y el que se produce entre la potencia reactiva y los módulos de las tensiones. Así, entre el nudo 2 y el 4 se observa que apenas existe un cambio en el ángulo de las tensiones, siendo más acusada la diferencia entre los módulos. Esto se justifica porque la carga C_1 conectada a 4 demanda sólo potencia reactiva. Por el contrario, entre los nudos 2 y 6 es más importante la caída de ángulos que la de tensión, debido ahora a que la carga C_2 en 6 tan solo consume potencia activa.

La potencia activa suministrada por el generador es igual a la consumida por la carga C_2 más las pérdidas en el tramo de línea 2-3, que es la única línea con resistencia presente en la red.

$$P_G = P_{C_2} + R_{23}I_{C_1}^2 = P_{C_2} + R_{23}\left(\frac{0.5^2}{V_4^2}\right) = 0.50573 \text{ p.u.} = 50.573 \text{ MW}$$

- 1.3.** En la red de la Figura 1.5 se desea mantener 66 kV en el nudo 5. Con el resto de los datos de la red indicados en la Tabla 1.3 y cargas en el nudo 2

$$S_1 = 150 + 60j$$

y en el 5

$$S_2 = 120 + 60j$$

determinar, trabajando en p.u. con $S_B = 300 \text{ MVA}$, qué tensión habrá en el nudo 1.

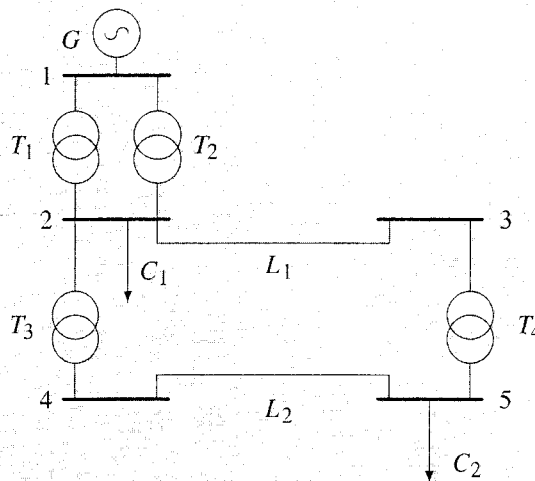


Figura 1.5 Esquema unifilar de la red del Problema 1.3.

Elemento	V_{nom} (kV)	S_{nom} (MVA)	Impedancia
T1	21/230	150	$X_{cc} = 0.1 \text{ p.u.}$
T2	21/230	150	$X_{cc} = 0.1 \text{ p.u.}$
T3	230/66	150	$X_{cc} = 0.1 \text{ p.u.}$
T4	230/66	150	$X_{cc} = 0.1 \text{ p.u.}$
Línea 2-3	-	-	$Z = 60j(\Omega)$
Línea 4-5	-	-	$Z = 60j(\Omega)$

Tabla 1.3 Datos de la red de la Figura 1.5.

Resolución

Puesto que se desconocen datos sobre el generador se supondrá ideal.

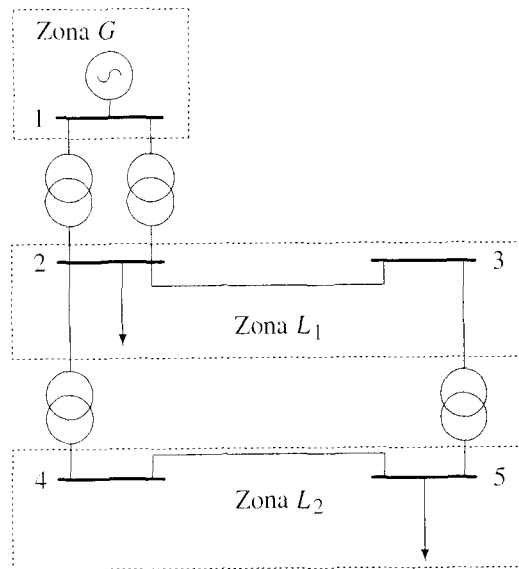


Figura 1.6 Áreas de tensión en la red del Problema 1.3.

Las distintas áreas de tensión que se pueden distinguir en este problema son las especificadas en la Figura 1.6. Los valores de las magnitudes base en cada una de ellas son:

$$\begin{aligned} \text{Zona } L1: \quad V_{BL1} = 230 \text{ kV} &\implies Z_{BL1} = \frac{230^2}{300} = 176.333 \Omega \\ \text{Zona } L2: \quad V_{BL2} = 66 \text{ kV} &\implies Z_{BL2} = \frac{66^2}{300} = 14.52 \Omega \\ \text{Zona } G: \quad V_{BG} = 21 \text{ kV} &\implies Z_{BG} = \frac{21^2}{300} = 1.47 \Omega \end{aligned}$$

Definidas las magnitudes base, los datos de la red en p.u. son:

- Impedancia de las líneas:

$$X_{23} = \frac{60}{Z_{BL1}} = 0.34; \quad X_{45} = \frac{60}{Z_{BL2}} = 4.132$$

- Reactancia de cortocircuito de los transformadores:

$$X_{T1} = X_{T2} = 0.1 \frac{21^2/150}{Z_{BG}} = 0.2$$

$$X_{T3} = 0.1 \frac{230^2/150}{Z_{BL1}} = 0.2$$

$$X_{T4} = 0.1 \frac{66^2/150}{Z_{BL2}} = 0.2$$

Al mismo resultado se habría llegado, sin necesidad de calcular las impedancias base en cada zona, considerando que las tensiones base coinciden con las nominales y que la potencia base se ha duplicado.

- Potencias en las cargas:

$$s_{C1} = \frac{150 + 60j}{S_B} = 0.5 + 0.2j; \quad s_{C2} = \frac{120 + 60j}{S_B} = 0.4 + 0.2j$$

- Tensión en el nudo 5:

$$V_5 = \frac{66}{66} = 1 \text{ p.u.}$$

Fijada la tensión del nudo 5, y tomando el origen de ángulos en el mismo, la intensidad por la carga C_2 es:

$$J_{C_2} = \frac{0.4 - 0.2j}{1} = 0.4 - 0.2j$$

Entre los nudos 2 y 5 existen dos caminos paralelos de impedancias $(X_{L1} + X_{T4})$ y $(X_{L2} + X_{T3})$ respectivamente, con lo que la impedancia equivalente resulta ser $0.48j$. La tensión en el nudo 2 viene dada entonces por:

$$u_2 = ZJ_{C_2} + u_5 \implies u_2 = 0.48j(0.4 - 0.2j) + 1 \angle 0 = 1.096 + 0.192j$$

Determinada la tensión en 2 se calcula la intensidad por la carga C_1 :

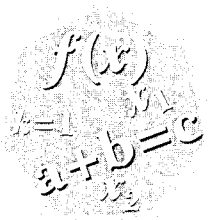
$$J_{C_1} = \frac{0.5 - 0.2j}{1.096 - .192j} = 0.474 - 0.099j$$

La tensión a la salida del generador se obtiene de:

$$u_1 = \frac{X_{T1}X_{T2}}{X_{T1} + X_{T2}}(J_{C_1} + J_{C_2}) + u_2 \implies u_1 = 1.16 \angle 13.94$$

La tensión en bornas del generador ha de ser de 24.364 kV para mantener 66 kV en el nudo 5.

GENERADORES SÍNCRONOS



El generador síncrono, también conocido como *alternador*, es la máquina eléctrica fundamental en todo sistema eléctrico de potencia, siendo la encargada de transformar la energía mecánica proporcionada por una turbina de vapor o hidráulica en energía eléctrica. Su principio de funcionamiento es muy simple: la inyección de una intensidad constante en una bobina instalada en la parte móvil o *rotor* genera un par de polos magnéticos cuyas líneas de campo se cierran en su mayor parte a través de la parte fija de la máquina o *estátor*. Si se hace girar el rotor a la velocidad adecuada (3000 r.p.m. para un par de polos), se inducen tensiones en las tres bobinas del estátor, iguales y decaladas entre sí 120° para proporcionar un sistema trifásico de tensiones (Figura 2.1.a).

Si el generador se encuentra en vacío, es decir, no circulan intensidades por las bobinas del estátor, la relación entre la tensión en bornas del generador y la intensidad de excitación (también llamada intensidad de campo) inyectada en el rotor, es prácticamente lineal hasta que aparecen fenómenos de saturación (Figura 2.1.b).

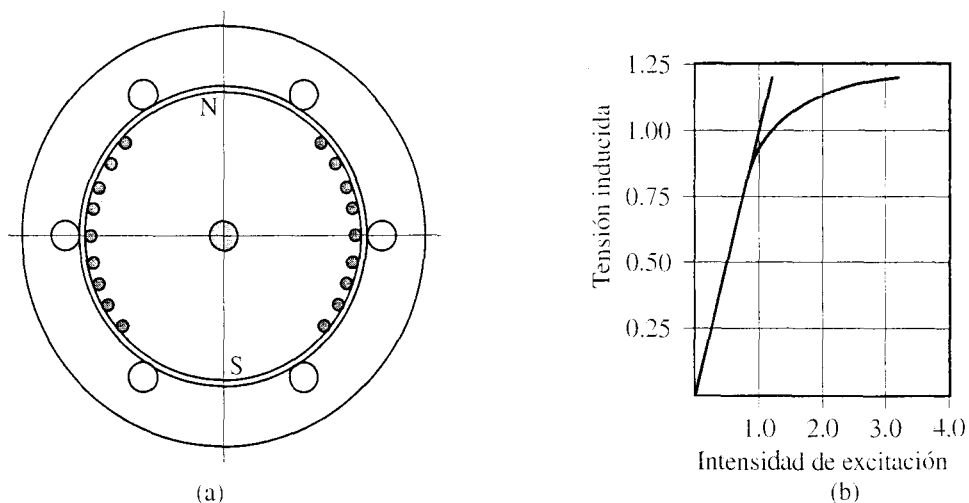


Figura 2.1 Generador síncrono de rotor liso y característica de vacío en p.u.

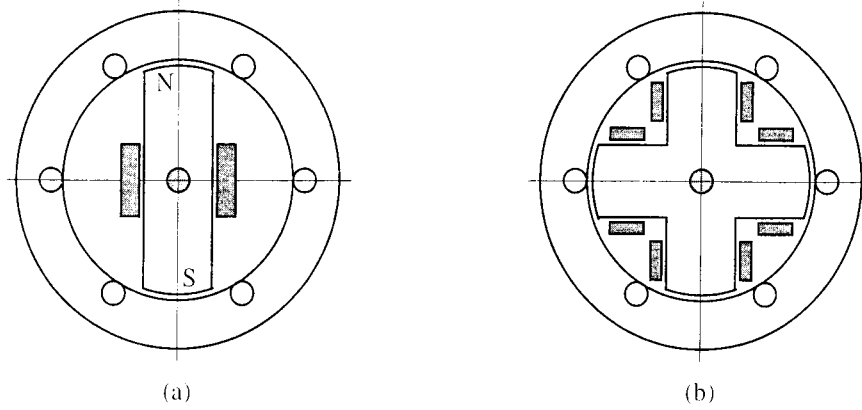


Figura 2.2 Generadores síncronos de polos salientes: a) 2 polos; b) 4 polos.

El generador cuyo esquema se muestra en la Figura 2.1 se conoce como *de rotor liso* al ser éste perfectamente cilíndrico, siendo utilizado en turbomáquinas de alta velocidad de giro características de centrales térmicas movidas por turbinas de vapor o gas. En centrales hidráulicas, se utilizan normalmente generadores de rotor *de polos salientes* (Figura 2.2), a velocidades más bajas y, por tanto, de más de dos polos. La velocidad de giro de una máquina síncrona cumple $\omega_m = 3000/p$ r.p.m., siendo p el número de pares de polos.

Cuando el generador se encuentra en carga, proporcionando una intensidad, la tensión en bornas es inferior a la que existía en vacío (también llamada *fuerza electromotriz* o FEM) debido a la caída de tensión causada por las resistencias de las bobinas del estátor y a la reactancia que presentan las mismas, incluyendo en ésta la reactancia de dispersión y la de *reacción de inducido* (flujo magnético que se cierra a través del rotor y que interactúa con el campo magnético creado por éste). El generador se comporta, por tanto, como una fuente real de tensión con una tensión en vacío o FEM de valor $\mathcal{E} = E \angle \delta$ y una impedancia interna $\mathcal{Z} = R + j X_s$, siendo X_s la reactancia síncrona. La tensión en bornas viene dada por:

$$V = \mathcal{E} - (R + j X_s) \mathcal{J} \quad (2.1)$$

$$V \angle 0 = E \angle \delta - (R + j X_s) I \angle -\varphi \quad (2.2)$$

ecuación que responde al modelo representado en la Figura 2.3, junto al diagrama fasorial correspondiente a (2.2).

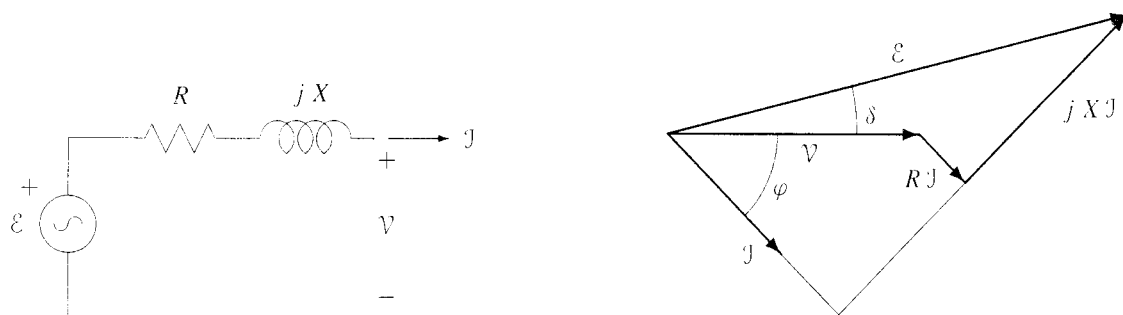


Figura 2.3 Modelo del generador de rotor liso y diagrama fasorial.

Los generadores de polos salientes presentan el inconveniente de que la reluctancia del circuito magnético depende de la posición del rotor. Este efecto se modela mediante dos reactancias: sobre el eje directo (d) y en cuadratura (q), dando lugar a dos reacciones de inducido originadas por dos componentes ortogonales de la intensidad $\mathcal{J} = \mathcal{J}_d + \mathcal{J}_q$.

La tensión en bornas de un generador de polos salientes viene dada por la siguiente ecuación (Figura 2.4):

$$V = \mathcal{E} - R\mathcal{I} - j X_d \mathcal{I}_d - j X_q \mathcal{I}_q \tag{2.3}$$

$$V \angle 0 = E \angle \delta - R I \angle -\varphi - j X_d I_d \angle \delta - 90^\circ - j X_q I_q \angle \delta \tag{2.4}$$

ecuación que no es posible modelar mediante un circuito equivalente como en el caso del generador de rotor liso.

La Ecuación (2.3) presenta el problema de que es necesario conocer el ángulo δ para descomponer la intensidad. Sumando y restando $j X_q \mathcal{I}_d$ al segundo miembro de (2.3) se obtiene $\mathcal{E} = V + R\mathcal{I} + j (X_d - X_q) \mathcal{I}_d + j X_q \mathcal{I}$, y puesto que $j (X_d - X_q) \mathcal{I}_d$ es un vector en fase con \mathcal{E} , se deduce que $V + R\mathcal{I} + j X_q \mathcal{I}$ está también en fase con \mathcal{E} , pudiendo obtenerse δ como la fase de dicho vector, como se muestra en la Figura 2.4.

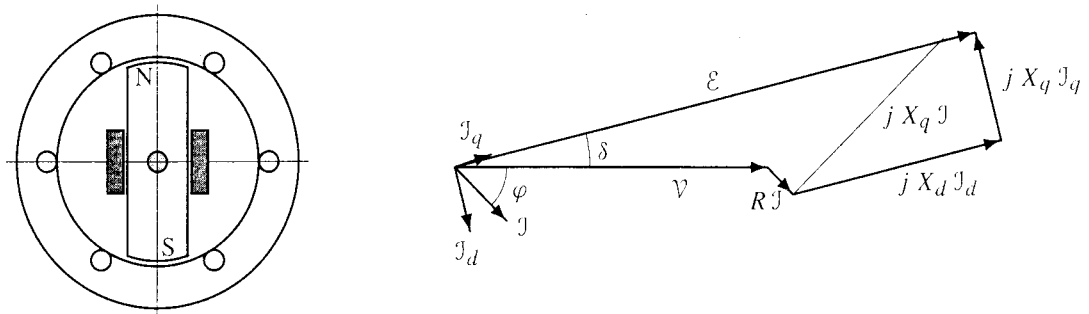


Figura 2.4 Diagrama fasorial del generador de polos salientes.

Como se ha puesto de manifiesto, no existe un circuito equivalente para el generador de polos salientes, utilizándose muchas veces el modelo de rotor liso con $X_s = (X_d + X_q)/2$, asumiendo los errores introducidos.

Por otra parte, los parámetros característicos de los generadores síncronos dependen en gran medida de su potencia nominal y de la velocidad de giro. La Tabla 2.1 muestra los valores típicos y su rango de variación (expresados en p.u. respecto a la propia base del generador y una frecuencia de 50 Hz) para generadores síncronos de rotor liso y polos salientes. Puede observarse cómo la resistencia es normalmente despreciable frente a la reactancia en el modelo del generador.

	X_s		X_d		X_q		R^*
Rotor liso	1.20	0.95 a 1.45	1.25	0.6 a 1.5	0.7	0.4 a 0.8	0.001 a 0.007
Polos salientes							0.003 a 0.015

Tabla 2.1 Valores característicos de los parámetros de generadores síncronos.

2.3. MODOS Y LÍMITES DE FUNCIONAMIENTO

Suponiendo despreciable la resistencia de los devanados frente a la reactancia, las potencias activa y reactiva suministradas por el generador se pueden obtener en función de la fuerza electromotriz como:

$$P = \frac{E \cdot V}{X_s} \sin \delta \tag{2.5}$$

$$Q = \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \tag{2.6}$$

Y para el generador de polos salientes:

$$P = \frac{E \cdot V}{X_d} \sin \delta + \frac{V^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \quad (2.7)$$

$$Q = \frac{E \cdot V}{X_d} \cos \delta - V^2 \left(\frac{\cos^2 \delta}{X_d} + \frac{\sin^2 \delta}{X_q} \right) \quad (2.8)$$

Si la tensión y la frecuencia de la red permanecen constantes aunque cambien las condiciones de funcionamiento del generador (situación que se conoce como *red de potencia de cortocircuito infinita*), cualquier actuación sobre la potencia mecánica suministrada al generador (manteniendo constante la excitación y, por tanto, la fuerza electromotriz E) se traduce en variaciones tanto en la potencia activa como en la reactiva que proporciona el generador a la red. La variación de potencia reactiva está motivada por la variación de la intensidad y, en consecuencia, de las pérdidas de potencia reactiva en el propio generador (Figura 2.5.a). Por el contrario, si se actúa sobre la excitación del generador manteniendo constante la potencia mecánica, la potencia activa no varía ($E \sin \delta$ permanece constante) y cambia la reactiva suministrada (Figura 2.5.b).

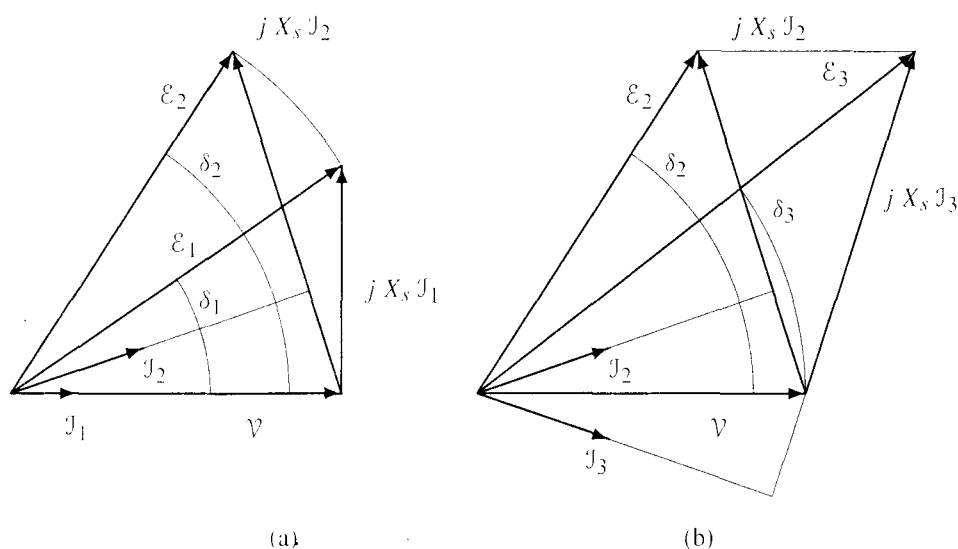


Figura 2.5 Diagrama fasorial del generador al incrementar la potencia mecánica y la excitación.

Como se ha puesto de manifiesto, mediante el control de la intensidad de excitación del rotor es posible controlar la potencia reactiva que proporciona el generador. Asimismo, dependiendo del accionamiento mecánico unido al generador síncrono, éste podrá funcionar como generador propiamente (par mecánico motor) o como motor síncrono (par mecánico resistente). Los distintos modos de funcionamiento del generador síncrono se recogen en la Figura 2.6.

En lo que respecta a los límites de funcionamiento del generador síncrono, cabe indicar los siguientes: i) potencias máxima y mínima, limitadas por el elemento motriz y por la potencia nominal del generador; ii) intensidad máxima de excitación, que limita asimismo el valor de E ; iii) intensidad máxima en los devanados del estátor; y iv) límite de estabilidad, impuesto por $\delta \leq 90^\circ$ para evitar que el generador salga de *sincronismo*. La Figura 2.7 presenta los límites de funcionamiento del generador, construida sobre el diagrama fasorial teniendo en cuenta (2.5) y (2.6).

PROBLEMAS RESUELTOS

- 2.1.** Un generador hidráulico de potencia nominal 87.5 MVA y tensión 13.8 kV, frecuencia nominal 50 Hz, reactancias $X_d = 1.2$ p.u. y $X_q = 0.7$ p.u., suministra su potencia nominal con factor de potencia 0.8 inductivo.

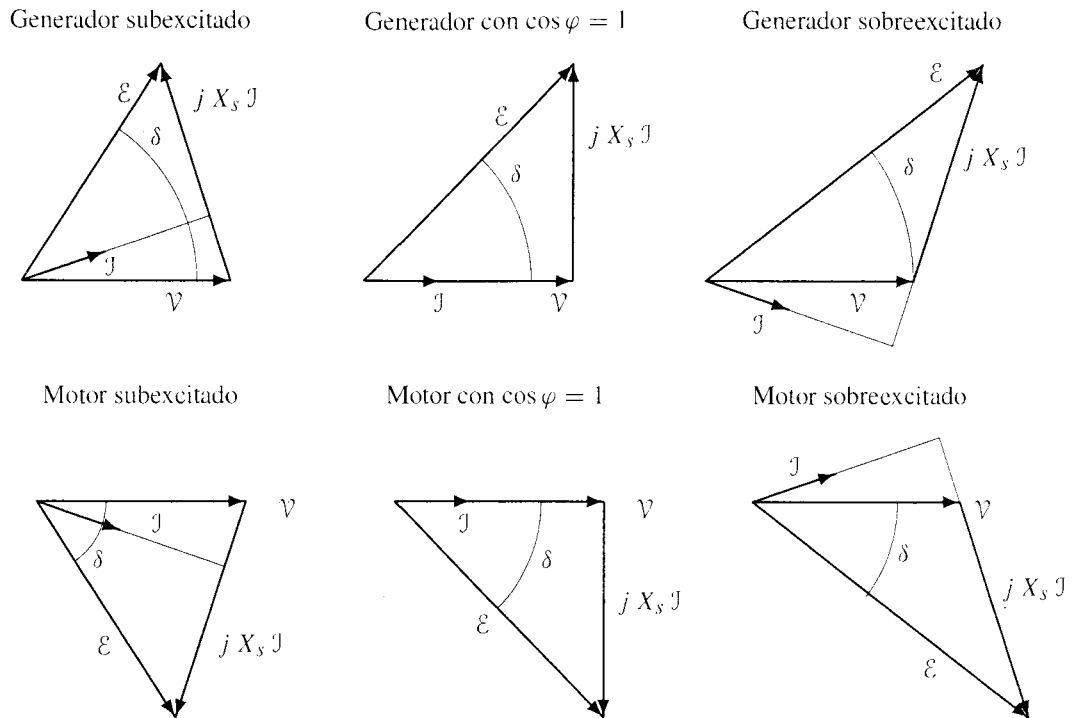


Figura 2.6 Modos de funcionamiento del generador síncrono.

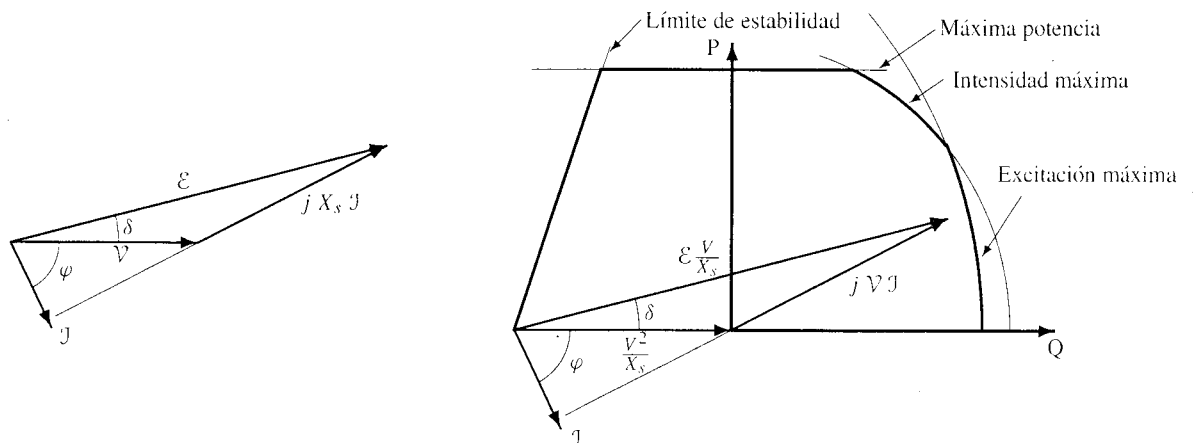


Figura 2.7 Límites de funcionamiento del generador síncrono.

1. Obtener el modelo del generador en dichas condiciones.
2. Si el generador pasa a suministrar 50 MW, manteniendo constante la excitación y la tensión en bornas, calcular el nuevo punto de trabajo.
3. Calcular la intensidad permanente de cortocircuito trifásico rígido en bornas del generador para las condiciones de funcionamiento indicadas en el enunciado.

Resolución

Primera cuestión: las condiciones de funcionamiento en bornas del generador, expresadas en p.u., vienen dadas por:

$$S = 1.0 \quad \varphi = \text{acos}(0.8) \quad V = 1.0 \angle 0$$

con lo que la intensidad y las potencias que proporciona el generador resultan,

$$I = 0.8 - 0.6j \quad P_g = 0.8 = 70 \text{ MW} \quad Q_g = 0.6 = 52.5 \text{ Mvar}$$

Como se ha puesto de manifiesto anteriormente, el generador de rotor de polos salientes no dispone de modelo equivalente, siendo necesario trabajar con la ecuación que define su funcionamiento (2.3) y

obtener la fuerza electromotriz del generador. Así, en primer lugar, será necesario calcular el ángulo δ de la fuerza electromotriz, ángulo que coincide con la fase de $V + j X_q J$:

$$V + j X_q J = 1.42 + 0.56 j = 1.526 \angle 21.52^\circ \quad \implies \quad \delta = 21.52^\circ$$

Conocido δ , ya se puede descomponer la intensidad en sus dos componentes ortogonales J_d e J_q (Figura 2.4):

$$\begin{aligned} I_q &= I \cos(\varphi + \delta) = 0.524 & J_q &= I_q \angle \delta = 0.488 + 0.192 j \\ I_d &= I \sin(\varphi + \delta) = 0.852 & J_d &= I_d \angle \delta - 90^\circ = 0.312 - 0.792 j \end{aligned}$$

Por último, la fuerza electromotriz se obtendrá de (2.3) como:

$$\mathcal{E} = V + j X_d J_d + j X_q J_q = 1.816 + 0.716 j = 1.952 \angle 21.52^\circ$$

Como se ha podido observar, trabajar con (2.3) no es fácil al ser necesario descomponer la intensidad en dos componentes ortogonales. Por ello, en muchos casos, se utiliza un modelo aproximado asimilando el generador de rotor de polos salientes a uno de rotor liso con $X_s = (X_d + X_q)/2$, lo cual permite utilizar el modelo de la Figura 2.3. Así, con $X_s = 0.95$, la fuerza electromotriz resultaría:

$$\mathcal{E} = V + j X_s J = 1.57 + 0.76 j = 1.744 \angle 25.83^\circ$$

Segunda cuestión: si el generador suministra ahora 50 MW, manteniendo constantes la tensión en bornas y la fuerza electromotriz, obviamente la potencia reactiva suministrada y por supuesto el factor de potencia cambiarán en la nueva situación.

Para un valor de $P_g = 50/87.5 = 0.571$, el nuevo valor del ángulo δ se puede obtener de (2.7), ecuación que es necesario resolver iterativamente:

$$P_g = 0.571 = \frac{E \cdot V}{X_d} \sin \delta + \frac{V^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta$$

resultando $\delta = 15.043^\circ$. La potencia reactiva suministrada se puede obtener ahora de (2.8):

$$Q_g = \frac{E \cdot V}{X_d} \cos \delta - V^2 \left(\frac{\cos^2 \delta}{X_d} + \frac{\sin^2 \delta}{X_q} \right) = 0.698$$

Las nuevas condiciones de trabajo en bornas del generador resultan, por tanto:

$$P_g = 0.571 = 50 \text{ MW} \quad Q_g = 0.698 = 61.05 \text{ Mvar} \quad S_g = 0.902 = 78.91 \text{ MVA}$$

$$\cos \varphi = 0.634 \quad I = 0.902 = 3.3 \text{ kA}$$

donde se ha tenido en cuenta que la intensidad nominal es $I_n = 3661 \text{ A}$.

Si se hubiera adoptado el modelo aproximado como generador de rotor liso, definido por (2.5) y (2.6), el punto de trabajo se obtendría como:

$$P_g = 0.571 = \frac{E \cdot V}{X_s} \sin \delta \quad \implies \quad \delta = 18.13^\circ$$

$$Q_g = \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} = 0.692$$

Con lo que el punto de funcionamiento vendría dado por:

$$P_g = 0.571 = 50 \text{ MW} \quad Q_g = 0.692 = 60.57 \text{ Mvar} \quad S_g = 0.902 = 78.54 \text{ MVA}$$

$$\cos \varphi = 0.637 \quad I = 0.898 = 3.29 \text{ kA}$$

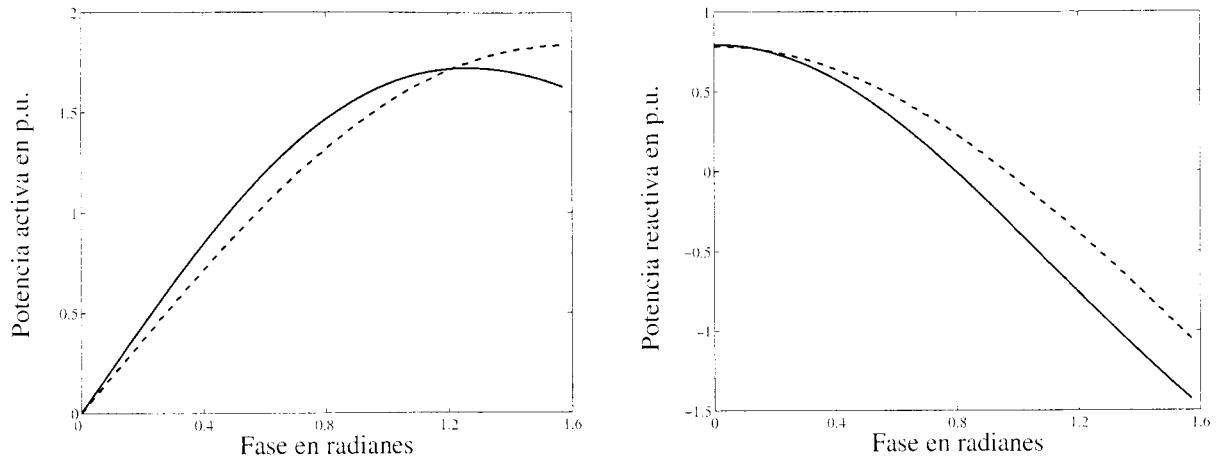


Figura 2.8 Potencias activa y reactiva del generador en función del ángulo δ , utilizando las ecuaciones del generador de polos salientes (línea continua) y la aproximación de rotor liso (línea discontinua).

Se puede observar que los errores cometidos con el modelo aproximado son aceptables a efectos de cálculo. En este sentido, la Figura 2.8 presenta, a modo de comparación, el error cometido en el cálculo de las potencias activa y reactiva al utilizar el modelo de rotor liso, suponiendo que la fuerza electromotriz se mantiene constante. Puede observarse cómo el error aumenta cuanto mayor es la fase de la fuerza electromotriz respecto a la tensión en bornas.

Tercera cuestión: si suponemos que la fuerza electromotriz no cambia, la intensidad que proporciona el generador en cortocircuito se obtendrá como:

$$V = 0 = \mathcal{E} - j X_d J_d - j X_q J_q \quad \implies \quad \begin{cases} J_q = 0 \\ J_d = \frac{\mathcal{E}}{j X_d} \end{cases}$$

De donde se obtiene $I_{cc} = I_d = 1.627 = 5956 \text{ A}$.

Utilizando el modelo aproximado de rotor liso, la intensidad de cortocircuito sería:

$$V = 0 = \mathcal{E} - j X_s J \quad \implies \quad I_{cc} = \frac{E}{X_s} = 1.836 = 6721 \text{ A}$$

En este caso, el error introducido por la aproximación resulta inaceptable.

2.2. Un generador síncrono de rotor liso, 10 MVA, 50 Hz, 11 kV y 13.2 Ω /fase de reactancia síncrona se encuentra girando en vacío. Determinar las condiciones de funcionamiento si:

1. El generador se conecta a una carga puramente resistiva de 10 MW nominales.
2. El generador se conecta a una red de potencia de cortocircuito infinita¹ a 11 kV, ajustándose para que suministre 10 MW con factor de potencia unidad.

Resolución

Primera cuestión: con los valores nominales del generador se calculan tanto la intensidad base como la impedancia base:

$$I_B = \frac{S_B}{\sqrt{3} V_B} = 525 \text{ A} \quad Z_B = \frac{S_B}{3 I_B^2} = 12.1 \Omega$$

con lo que la reactancia síncrona en p.u. resulta $X_s = 1.091$.

¹Se entiende como red de potencia de cortocircuito infinita en un punto a una red cuyas característica de tensión y frecuencia no se ven afectadas al variar la potencia inyectada en dicho punto, actuando, a todos lo efectos, como una fuente ideal de tensión.

Con el generador girando en vacío, es decir, sin suministro de potencia:

$$J = 0 \quad \implies \quad \mathcal{E} = V = 1 \angle 0$$

Si, manteniendo constante \mathcal{E} , el generador se conecta a una carga resistiva de 10 MW nominales, es decir, $R = 12.1 \Omega/\text{fase} = 1 \text{ p.u.}$, se tiene que:

$$J = \frac{\mathcal{E}}{R + j X_s} = 0.457 - j 0.498 = 0.676 \angle -47.49^\circ$$

$$V = \mathcal{E} - j X_s J = R J = 0.457 - j 0.498 = 0.676 \angle -47.49^\circ$$

Con lo cual el generador suministra únicamente 4.57 MW con una tensión en bornas de 0.676 p.u. (7.43 kV).

Para que el generador trabaje con la tensión nominal en bornas ($V = 1 \angle 0$) y suministre por tanto 10 MW a la resistencia (con una intensidad $J = 1 \angle 0$), habría que aumentar la excitación del generador hasta obtener:

$$\mathcal{E} = V + j X_s J = 1 + j 1.09 = 1.48 \angle 47.49^\circ$$

Obviamente, habría que actuar sobre el elemento motriz para asegurar que éste proporcione en cada momento la potencia eléctrica demandada más las propias pérdidas del generador, si se hubieran tenido en cuenta.

Segunda cuestión: si el generador, estando en vacío, se conecta a una red de potencia de cortocircuito infinita, las potencias activa y reactiva que el generador inyecta inicialmente en la red son nulas:

$$\implies \quad \mathcal{E} = V = 1 \angle 0 \quad \implies \quad \begin{cases} P = \frac{E \cdot V}{X_s} \sin \delta = 0 \\ Q = \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} = 0 \end{cases}$$

Para que el generador pase a suministrar 10 MW con factor de potencia unidad ($P = 1.0$ y $Q = 0.0$), sería necesario ajustar tanto el elemento motriz como la excitación del generador. El módulo y la fase de la fuerza electromotriz se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$P = 1.0 = \frac{E \cdot V}{X_s} \sin \delta \quad Q = 0.0 = \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} = 0$$

resultando $E = 1.48$ y $\delta = 47.50^\circ$.

El orden correcto de actuaciones en este caso sería:

1. Aumentar la excitación del generador hasta $E = 1.48$ ($\delta = 0^\circ$), obteniéndose:

$$P = \frac{E \cdot V}{X_s} \sin \delta = 0 \quad Q = \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} = 0.44$$

Con lo cual el generador suministraría 4.4 Mvar y 231 A.

2. Aumentar la potencia suministrada por el elemento motriz hasta los 10 MW manteniendo la excitación ($E = 1.48$):

$$P = 1.0 = \frac{E \cdot V}{X_s} \sin \delta \quad \implies \quad \delta = 47.50^\circ$$

$$Q = \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} = 0.0$$

Con lo que el generador pasa a suministrar únicamente la potencia activa requerida, equivalente a 525 A con factor de potencia unidad.

Compruebe el lector que el orden inverso no es posible en este caso. Por otra parte, existen otras opciones.

- 2.3.** El generador hidráulico del Problema 2.1 (87.5 MVA y tensión 13.8 kV, 50 Hz, $X_d = 1.2$ p.u. y $X_q = 0.7$ p.u.) se hace trabajar a 71.8 MW como generador (turbina) y a 76.2 MW como motor síncrono (bomba). Determinar la máxima reactiva que puede suministrar en cada caso para evitar que se supere la intensidad nominal y la fuerza electromotriz correspondiente. Utilizar el modelo simplificado de rotor liso.

Resolución

Funcionando como generador accionado por la turbina hidráulica: suponiendo que la tensión en bornas es la nominal ($V = 1 \angle 0$) y para la intensidad nominal ($I = 1$), la potencia aparente será $S = V \cdot I = 1.0$, con lo cual:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \pm 0.572 = \pm 50.0 \text{ Mvar}$$

donde $P = 71.8/87.5 = 0.821$.

La fuerza electromotriz se obtendrá resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones:

- Generador sobreexcitado:

$$\left. \begin{aligned} P = 0.821 &= \frac{E \cdot V}{X_s} \sin \delta \\ Q = 0.572 &= \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \end{aligned} \right\} \implies E = 1.729 \text{ y } \delta = 26.184^\circ$$

- Generador subexcitado:

$$\left. \begin{aligned} P = 0.821 &= \frac{E \cdot V}{X_s} \sin \delta \\ Q = -0.572 &= \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \end{aligned} \right\} \implies E = 0.904 \text{ y } \delta = 59.65^\circ$$

Funcionando como motor accionando una bomba hidráulica: en este caso la potencia activa resulta $P = -76.2/87.5 = -0.871$, donde el signo negativo indica que la potencia eléctrica es consumida para accionar la bomba. Para $S = 1.0$ se obtiene una reactiva máxima de:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \pm 0.492 = \pm 43.0 \text{ Mvar}$$

Nuevamente, la fuerza electromotriz se obtendrá resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones:

- Motor sobreexcitado:

$$\left. \begin{aligned} P = -0.871 &= \frac{E \cdot V}{X_s} \sin \delta \\ Q = 0.492 &= \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \end{aligned} \right\} \implies E = 1.684 \text{ y } \delta = -29.45^\circ$$

- Motor subexcitado:

$$\left. \begin{aligned} P = -0.871 &= \frac{E \cdot V}{X_s} \sin \delta \\ Q = -0.492 &= \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \end{aligned} \right\} \implies E = 0.984 \text{ y } \delta = -57.18^\circ$$

- 2.4.** Un turbogenerador de una central térmica tiene las siguientes características: 776 MVA, 23 kV, 50 Hz, $X_s = 1.2$ p.u.

El funcionamiento del generador está sujeto a los siguientes límites, además de a la propia intensidad y potencia nominales:

- La turbina de vapor que acciona el generador proporciona una potencia motriz comprendida entre 660 y 194 MW.
- La intensidad de excitación en el rotor, y el efecto de la saturación del circuito magnético, limita la fuerza electromotriz disponible a un máximo de 1.96 p.u.
- Para asegurar que el generador se mantiene en sincronismo, la fase de la fuerza electromotriz se limita a 70° como máximo.

Determinar los límites de funcionamiento del generador en términos de potencias activa y reactiva.

Resolución

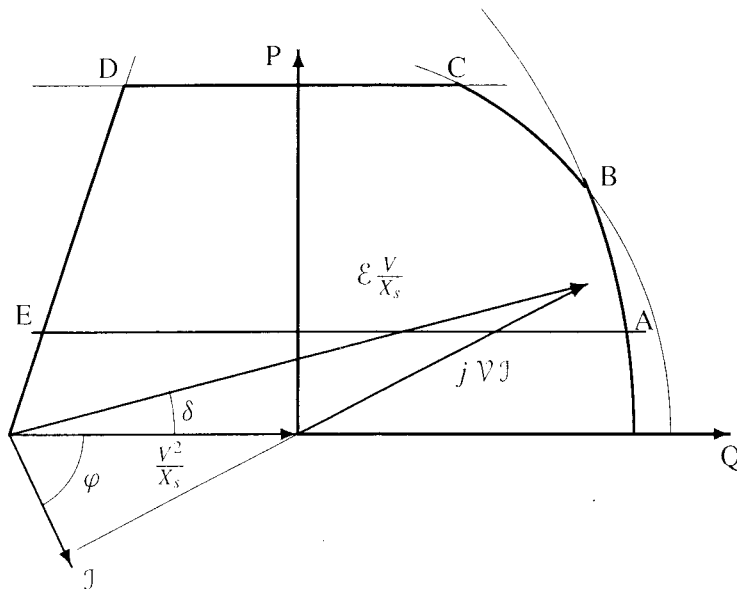
Los límites de funcionamiento del generador síncrono se pueden construir sobre el diagrama vectorial, como se puso de manifiesto en el Apartado 2.3. Las restricciones impuestas son las siguientes, expresadas en p.u.:

- Potencias máxima y mínima: $0.25 \leq P \leq 0.851$
- Intensidad máxima: $I = 1.0$, lo que implica una potencia aparente máxima de $S = 1.0$, siempre suponiendo tensión nominal. En términos de potencias activa y reactiva:

$$P^2 + Q^2 \leq 1.0$$

- Excitación máxima: $E \leq 1.96$.
- Estabilidad: $\delta \leq 70^\circ$.

La zona de trabajo se representa en la Figura 2.9, estando delimitada por los puntos A al E:



Punto	P MW	Q Mvar	E p.u.	δ Grados	I kA	cos φ
A	194.00	606.06	1.96	8.82	15.97	0.305 (r)
B	630.11	453.18	1.96	29.79	19.48	0.812 (r)
C	660.00	408.18	1.92	32.03	19.49	0.851 (r)
D	660.00	-406.62	1.09	70.00	19.47	0.852 (a)
E	194.00	-575.79	0.32	70.00	15.25	0.319 (a)

Figura 2.9 Límites de funcionamiento del generador del Problema 2.4.

A Definido por la excitación máxima, $E = 1.96$, y la potencia mínima, $P = 0.25$:

$$\left. \begin{aligned} P = 0.25 &= \frac{E \cdot V}{X_s} \operatorname{sen} \delta \\ Q &= \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \\ E &= 1.96 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q = 0.781 \text{ y } \delta = 8.82^\circ$$

B Definido por la intensidad máxima, $I = 1.0$, y la excitación máxima, $E = 1.96$:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{E \cdot V}{X_s} \operatorname{sen} \delta \\ Q &= \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \\ P^2 + Q^2 &= 1.0 \\ E &= 1.96 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = 0.812, Q = 0.584 \text{ y } \delta = 29.79^\circ$$

C Definido por la potencia máxima, $P = 0.851$, y la intensidad máxima, $I = 1.0$:

$$\left. \begin{aligned} P &= 0.851 = \frac{E \cdot V}{X_s} \operatorname{sen} \delta \\ Q &= \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \\ P^2 + Q^2 &= 1.0 \end{aligned} \right\} \implies Q = 0.526, E = 1.924 \text{ y } \delta = 32.03^\circ$$

D Definido por la potencia máxima, $P = 0.851$, y el límite de estabilidad, $\delta = 70^\circ$:

$$\left. \begin{aligned} P &= 0.851 = \frac{E \cdot V}{X_s} \operatorname{sen} \delta \\ Q &= \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \\ \delta &= 70^\circ \end{aligned} \right\} \implies Q = -0.524 \text{ y } E = 1.086$$

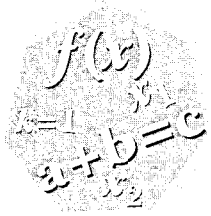
La intensidad en este caso resulta $I = 0.999$, muy próxima a la nominal.

E Definido por la potencia mínima, $P = 0.25$, y el límite de estabilidad, $\delta = 70^\circ$:

$$\left. \begin{aligned} P &= 0.25 = \frac{E \cdot V}{X_s} \operatorname{sen} \delta \\ Q &= \frac{E \cdot V}{X_s} \cos \delta - \frac{V^2}{X_s} \\ \delta &= 70^\circ \end{aligned} \right\} \implies Q = -0.742 \text{ y } E = 0.319$$



TRANSFORMADORES



Los transformadores de potencia, elevadores y reductores, juegan un papel fundamental en el funcionamiento y estructura de los sistemas de potencia. De hecho, puede afirmarse que la existencia misma de los sistemas de generación y transporte en corriente alterna, tal como los conocemos en la actualidad, se debe al descubrimiento del transformador, que resulta ser además un dispositivo extraordinariamente simple, robusto y eficaz.

El circuito equivalente de un transformador monofásico real de relación $n = N_p/N_s$ se muestra en la Figura 3.1. Además de un transformador ideal, este circuito consta de sendas impedancias serie, Z_p y Z_s , que modelan las pérdidas óhmicas de cada devanado (resistencia) y los flujos de dispersión (reactancia), así como de una impedancia en derivación, Z_m , cuya parte resistiva tiene en cuenta las pérdidas en el núcleo (histéresis y corrientes parásitas), y cuya reactancia modela la corriente de magnetización en vacío.

Cuando se trabaja en el sistema p.u., la relación del transformador ideal vale 1:1 si las tensiones base de ambos devanados se eligen en la misma proporción que sus tensiones nominales, es decir, si $V_{B1} = nV_{B2}$. En estas condiciones, el valor en p.u. de cualquier impedancia es el mismo en ambos devanados. Por tanto, utilizando sistemáticamente esta técnica en cada nivel de tensión en que queda dividido un sistema, los transformadores ideales pueden omitirse del circuito equivalente, quedando sólo sus impedancias.

Por otro lado, mientras que el ensayo en vacío suministra el valor de Z_m , el ensayo en cortocircuito proporciona una impedancia serie conjunta Z_{cc} , que en p.u. resulta ser la suma de Z_p y Z_s . Dado que, en la práctica, carece de utilidad desagregar la impedancia serie, en lugar de la bipuerta en "T" de la

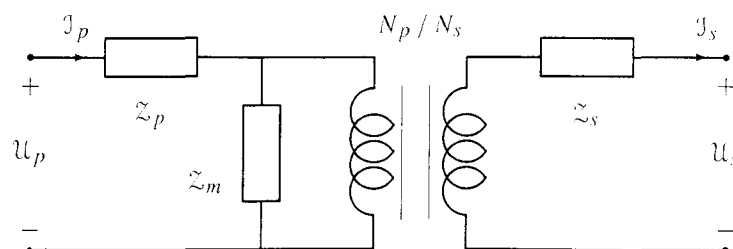


Figura 3.1 Circuito equivalente de un transformador monofásico.

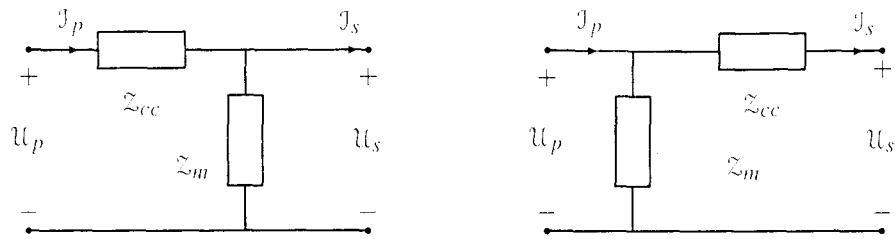


Figura 3.2 Circuitos simplificados en p.u. de un transformador.

Figura 3.1 se utilizan indistintamente las más simples de la Figura 3.2. En la mayoría de aplicaciones de sistemas de potencia en régimen permanente equilibrado, se da un paso más y se ignora Z_m porque su valor es muy elevado.

Un transformador trifásico se obtiene interconectando eléctricamente tres bancos monofásicos, o bien devanando tres pares de arrollamientos sobre otras tantas columnas de un único núcleo magnético, que puede adoptar diferentes topologías. Desde un punto de vista puramente eléctrico, ambas disposiciones se analizan y se comportan de igual modo en circuitos trifásicos perfectamente equilibrados, por lo que los detalles constructivos pueden obviarse en este apartado.

Como cualquier otro elemento trifásico, cada devanado de un transformador puede conectarse eléctricamente en estrella (Y) o en triángulo (Δ), lo que da lugar a diferentes relaciones de transformación con igual configuración magnética. Las Figuras 3.3 y 3.4 muestran respectivamente una conexión estrella-estrella y estrella-triángulo, de entre las diversas posibilidades existentes, así como los diagramas fasoriales correspondientes a las tensiones fase-neutro de ambos devanados, suponiendo que sólo existen tensiones de secuencia directa. En el primer caso, el desfase entre tensiones es nulo, mientras que en el segundo la tensión del primario está retrasada 30° respecto a la del secundario.

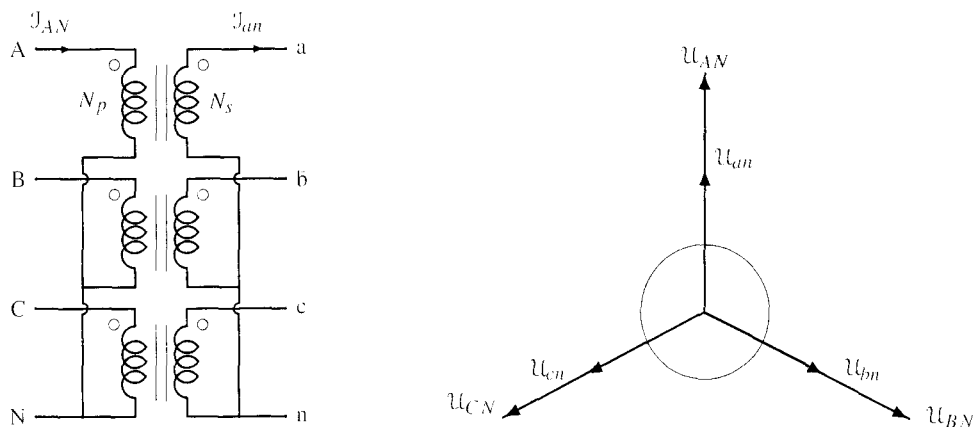


Figura 3.3 Conexión Yy0 de un transformador trifásico.

Modificando las conexiones de los devanados se obtienen otros desfases, que siempre resultan ser múltiplos de 30° . Por ello, se acostumbra a denominar las conexiones de los transformadores trifásicos mediante un número que refleja la posición en la esfera de un reloj de la tensión del devanado de menor tensión cuando la del de mayor tensión se encuentra a las 12:00. Así, los dos ejemplos anteriores se denotan como "Yy0" e "Yd1" respectivamente, añadiéndose la letra N junto a la Y para aquellos casos en que el neutro está puesto a tierra. Esto significa además que, a diferencia de los transformadores monofásicos, la relación de transformación es en general un número complejo. Consecuentemente, las ecuaciones del transformador trifásico ideal deben generalizarse como sigue, para tener en cuenta este hecho:

$$U_{AN} = n \cdot u_{an} \quad ; \quad J_{an} = n^* \cdot J_{AN} \quad (3.1)$$

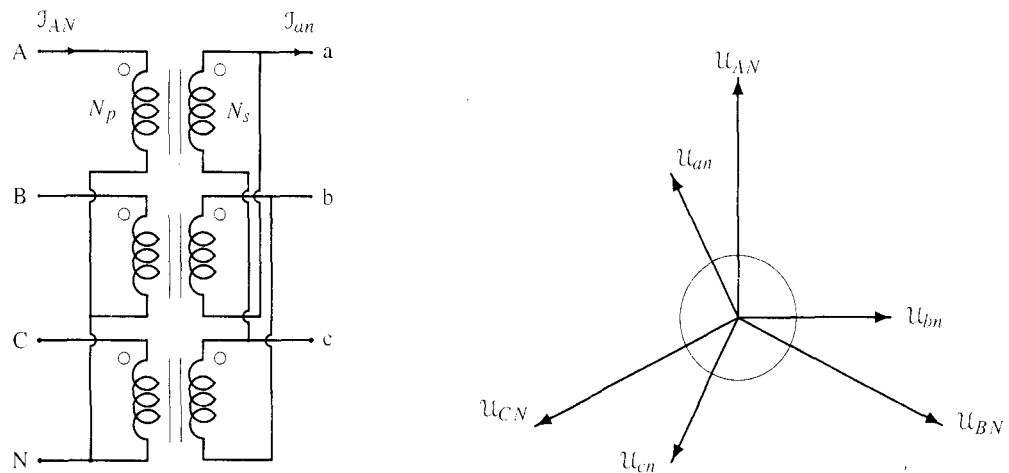


Figura 3.4 Conexión Yd11 de un transformador trifásico.

donde el símbolo conjugado aparece en la relación entre intensidades para que el transformador ideal no consuma potencia activa ni reactiva. Para las dos configuraciones mostradas en las Figuras 3.3 y 3.4 la relación de transformación vale:

$$n = N_p/N_s \underline{0} \quad (\text{Yy0}) \quad ; \quad n = \sqrt{3} \cdot N_p/N_s \underline{-30} \quad (\text{Yd11})$$

Puede comprobarse asimismo que una impedancia Z conectada en el secundario se transforma en una impedancia $|n|^2 Z$ vista desde el primario.

La conexión Y permite la utilización de sistemas a cuatro hilos, bien con neutro aislado o bien conectado a tierra (rígidamente o a través de una impedancia). Por otro lado, la conexión en Δ constituye un apantallamiento frente a armónicos múltiplos de 3 y corrientes homopolares que pudieran circular por el otro devanado.

Es fácil demostrar que, cuando el transformador se alimenta con tensiones de secuencia inversa, los desfases entre ambos devanados cambian de signo.

3.3. SISTEMAS NORMALES

De (3.1) se deduce que, en los transformadores trifásicos, tanto las tensiones como las intensidades de secuencia directa se atrasan o adelantan el mismo ángulo al pasar de un devanado a otro. Por otro lado, por el mismo motivo que dos transformadores en paralelo deben tener la misma relación de transformación, la interconexión en mallas de los distintos niveles de tensión debe realizarse de modo que el conjunto constituya lo que se denomina un *sistema normal*. Un sistema es normal cuando el producto de las relaciones de transformación que aparecen a lo largo de cualquier bucle vale $1 \underline{0}$, como ocurre en el sistema mostrado en la Figura 3.5.

Por construcción, todo sistema real funcionando en secuencia directa es un sistema normal cuando sus transformadores trabajan con relación de transformación nominal. En esta situación, carece de interés retener los desfases provocados por el grupo de conexión en cada uno de los niveles de tensión, dado que estos desfases no afectan a los flujos de potencia del sistema ni a ninguna otra magnitud. Por tanto, cuando se trabaja en p.u., puede adoptarse para el transformador trifásico un modelo monofásico sin desfases, como el mostrado en la Figura 3.2, lo cual equivale a utilizar tensiones base en cada devanado relacionadas mediante una constante n que en general es compleja. Estos desfases pueden incluso ignorarse al pasar a magnitudes reales, salvo que exista interés en referir todos los fasores del sistema a un único origen de fases.

Para trabajar con la matriz de admitancias de nudos, es más común utilizar la bipuerta en π de la Figura 3.6, cuyo sistema de ecuaciones viene dado por:

$$\begin{pmatrix} J_p \\ -J_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{cc} & -y_{cc} + y_m/2 \\ -y_{cc} + y_m/2 & y_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ u_s \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

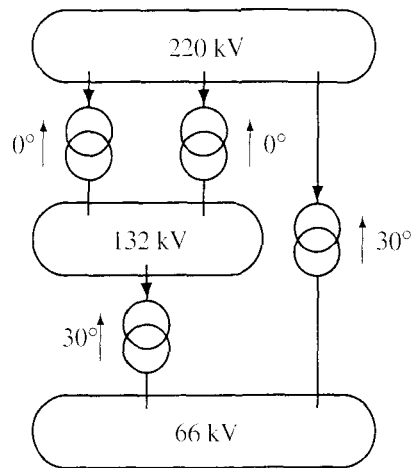


Figura 3.5 Ejemplo de sistema normal.

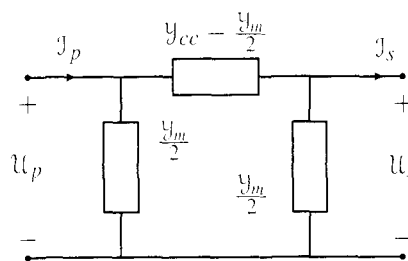


Figura 3.6 Circuito equivalente en π de un transformador.

Estos transformadores constan de tres devanados por columna, denominados primario, secundario y terciario. El devanado terciario, diseñado generalmente para una potencia aparente menor, se utiliza para conectar compensadores de reactiva o servicios auxiliares. Si se conecta en Δ , contribuye además a amortiguar armónicos múltiplos de 3 y disequilibrios. En determinadas aplicaciones, más que un devanado terciario propiamente dicho, se utilizan dos secundarios de potencia similar, uno en Y y otro en Δ , cuyas tensiones están desfasadas por consiguiente 30° . De ese modo, si ambos secundarios alimentan una carga idéntica, no aparecen armónicos de orden 5 y 7 en el primario.

Ahora bien, con independencia de la potencia relativa de cada devanado, todo transformador de tres devanados viene representado por el circuito monofásico equivalente de la Figura 3.7, para sistemas normales de secuencia directa.

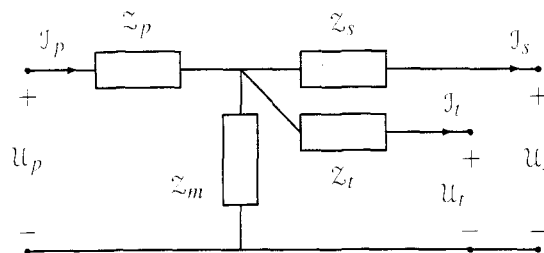


Figura 3.7 Circuito equivalente de un transformador de tres devanados.

En dicha figura, la impedancia de magnetización suele ignorarse y las impedancias serie de cada devanado se obtienen a partir de las impedancias de cortocircuito mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} Z_p &= (Z_{ps} + Z_{pt} - Z_{st})/2 \\ Z_s &= (Z_{ps} + Z_{st} - Z_{pt})/2 \\ Z_t &= (Z_{pt} + Z_{st} - Z_{ps})/2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde Z_{ij} es la impedancia que se obtiene alimentando el devanado i con su intensidad nominal y cortocircuitando el devanado j .

Si no se necesita aislamiento galvánico, los dos devanados de un transformador pueden conectarse eléctricamente en serie, a modo de divisor de tensión, como se indica en la Figura 3.8, consiguiéndose unos parámetros diferentes con el mismo material.

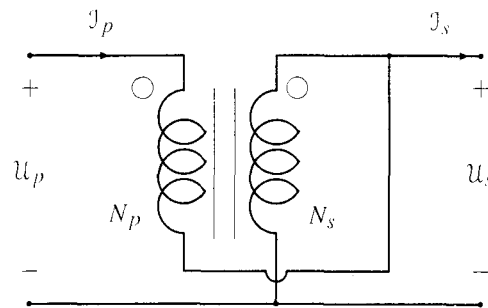


Figura 3.8 Conexión como autotransformador.

Si, cuando se conectan como transformador ordinario, los dos devanados tienen una relación $n = N_p/N_s$, una potencia aparente nominal S y una impedancia de cortocircuito Z_{cc} , en la conexión como autotransformador dichos parámetros valen $1 + (1/n)$, $(1 + n) \cdot S$ y $Z_{cc}/(1 + n)$ respectivamente.

Con el mismo coste se consigue mayor potencia, menores pérdidas y menor corriente de excitación, pero, al reducirse la impedancia serie, aumenta la corriente de cortocircuito. Una solución de compromiso se obtiene cuando n está comprendida entre 1 y 2, lo que se cumple para 400/220 kV, 220/132 kV y 132/66 kV.

Estos transformadores tienen capacidad para modificar en carga el módulo o el ángulo de su relación de transformación, dentro de pequeños márgenes, para controlar diversas magnitudes del sistema. En presencia de relaciones de transformación no nominales, el sistema deja de ser normal, apareciendo por tanto un transformador ideal en el circuito equivalente en p.u.

REGULACIÓN DE TENSIÓN

La regulación de tensión se consigue añadiendo cambiadores de tomas bajo carga a un transformador normal, que modifican el número de espiras del devanado de alta, o bien mediante un transformador especial que inyecta en serie con el circuito principal una tensión de magnitud variable y desfase nulo. En la Figura 3.9 se muestra el circuito monofásico resultante, donde a representa a n en p.u., así como el modelo equivalente en π . Ignorando la impedancia de magnetización, las ecuaciones nodales correspondientes vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} J_p \\ -J_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{cc}/a^2 & -y_{cc}/a \\ -y_{cc}/a & y_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_p \\ U_s \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Con estos dispositivos se puede regular la tensión de un nudo próximo y, en menor medida, el flujo de potencia reactiva a través de un elemento (normalmente el propio transformador).

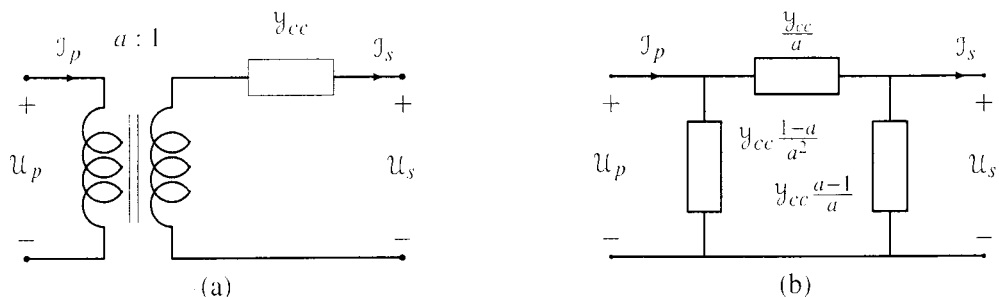


Figura 3.9 a) Transformador con toma variable; b) circuito en π equivalente.

DESPLAZAMIENTO DE FASE

Se consiguen pequeños desplazamientos de fase inyectando en serie con el circuito principal una tensión de magnitud variable con un desfase de $\pm 90^\circ$. El circuito equivalente, como se muestra en la Figura 3.10, contiene un transformador ideal de relación $1 \mid \alpha : 1$, el cual retrasa las tensiones e intensidades un ángulo α al pasar del primario al secundario (o las adelanta si α es negativo).

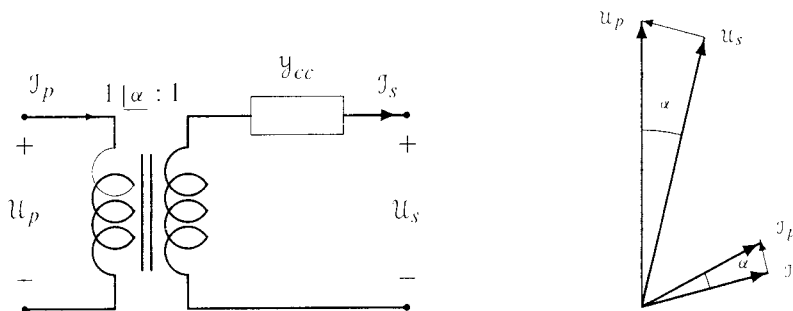


Figura 3.10 Circuito monofásico equivalente de transformador desfasador.

Sus ecuaciones de nudos son:

$$\begin{pmatrix} J_p \\ -J_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{cc} & -Y_{cc} \cdot 1 \mid \alpha \\ -Y_{cc} \cdot 1 \mid -\alpha & Y_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_p \\ U_s \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

donde puede apreciarse la no reciprocidad del dispositivo ocasionada por la no simetría de la matriz.

Este dispositivo, mucho menos abundante que el anterior, se utiliza para controlar los flujos de potencia activa en grandes ejes de transporte.

PROBLEMAS RESUELTOS

3.1. El transformador elevador de una central hidroeléctrica tiene las siguientes características: 100 MVA, 13.8/220 kV,

Ensayo en vacío: $I_0 = 0.8\%$, $P_0 = 100 \text{ kW}$
 Ensayo en cortocircuito: $E_{cc} = 8\%$, $P_{cc} = 300 \text{ kW}$

Determinar:

1. El modelo en p.u. del transformador.
2. La caída de tensión en el transformador y el rendimiento de éste cuando suministra 100 MW a 220 kV con factor de potencia unidad.

Resolución

Primera cuestión: utilizando el modelo aproximado de la Figura 3.11. y tomando como valores nominales $V_{N1} = 13.8$ kV, $V_{N2} = 220$ kV, $I_{N1} = 4.184$ kA e $I_{N2} = 0.262$ kA, se obtienen los parámetros en p.u. del transformador a partir de los ensayos del mismo:

- Ensayo en vacío:

$$P_0 = 100 \text{ kW} = 0.001 \text{ p.u.} \quad \implies \quad R_{Fe} = \frac{V_1^2}{P_0} = \frac{1}{0.001} = 1000 \text{ p.u.}$$

Por otra parte, conocida la intensidad de vacío, $I_0 = 0.008$ p.u., se obtiene I_μ :

$$I_{Fe} = \frac{V_1}{R_{Fe}} = \frac{1}{1000} = 0.001 \text{ p.u.} \quad \implies \quad I_\mu = \sqrt{I_0^2 - I_{Fe}^2} = 0.00794 \text{ p.u.}$$

de donde $X_\mu = V_1/I_\mu = 125.988$ p.u. La impedancia de magnetización resulta, por tanto, $Z_m = 15.625 + j 124.019$ en p.u.

- Ensayo en cortocircuito:

Despreciando la intensidad que circula por Z_m frente a la intensidad nominal, resulta:

$$V_{cc} = 0.08 \quad \implies \quad Z_{cc} = \frac{V_{cc}}{I_1} = \frac{0.08}{1} = 0.08 \text{ p.u.}$$

Asimismo, a partir de las pérdidas en cortocircuito, 0.003 en p.u., se obtiene R_{cc} :

$$R_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_1^2} = \frac{0.003}{1^2} = 0.003 \text{ p.u.}$$

con lo cual, $X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2} = 0.07994$ p.u.

La impedancia serie del transformador resulta, por tanto, $Z_s = 0.003 + j 0.07994 = 0.08 \angle 87.85^\circ$. Nótese el fuerte carácter inductivo de dicha impedancia.

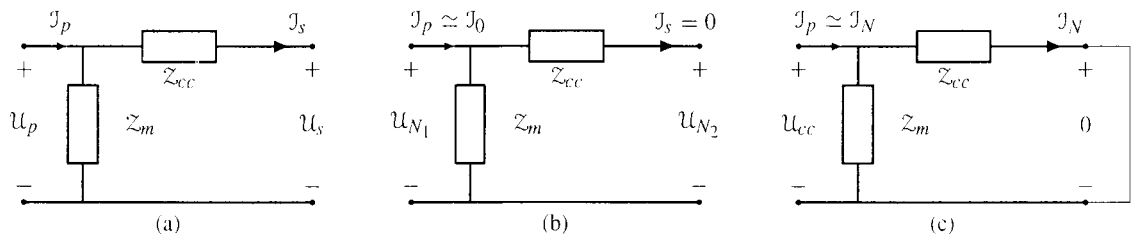


Figura 3.11 Modelo del transformador (a) y ensayos en vacío (b) y en cortocircuito (c).

Segunda cuestión: si el transformador suministra 100 MW a 220 kV con factor de potencia unidad, $S_2 = 1 \angle 0^\circ$, $U_2 = 1 \angle 0^\circ$ e $J_2 = 1 \angle 0^\circ$, la tensión en el primario del transformador se obtiene como:

$$U_1 = U_2 + Z_s J_2 = 1.003 + j 0.07994 = 1.00618 \angle 4.557^\circ$$

Conocida U_1 , es posible calcular la intensidad que circula por Z_m :

$$J_m = \frac{U_1}{Z_m} = 0.00164 - j 0.00788 = 0.00805 \angle -78.262^\circ$$

Como se puede comprobar, $J_m \ll J_2$ y se puede despreciar en la mayoría de los casos.

La intensidad en el primario del transformador es, por tanto,

$$J_1 = J_2 + J_m = 1.00164 - j 0.00788 = 1.00167 \angle -0.4508^\circ$$

y la potencia consumida:

$$S_1 = U_1 J_1^* = 1.00461 + j 0.088$$

que corresponde a 100.461 MW y 8.8 Mvar.

En consecuencia, la caída de tensión resulta $\Delta V = V_1 - V_2 = 0.62\%$ y el rendimiento $\eta = 99.6\%$.

Si se hubiera despreciado la intensidad \mathcal{J}_m frente a \mathcal{J}_2 , utilizando por tanto un modelo basado únicamente en la impedancia serie, $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$, la potencia en el primario resultaría:

$$S_1 = \mathcal{U}_1 \mathcal{J}_1^* = 1.003 + j 0.0799$$

que corresponde a 100.3 MW y 7.8 Mvar. Con ello, el rendimiento pasaría a ser $\eta = P_2/P_1 = 99.7\%$, observándose que las pérdidas disminuyen, así como la reactiva consumida al despreciar la reactancia de magnetización del transformador. Evidentemente, el error cometido por la aproximación es completamente asumible en la mayoría de los estudios. Compruebe el lector que la caída de tensión no se ve afectada por la aproximación introducida.

Una segunda aproximación, habitual en estudios en los que las magnitudes de interés son los flujos de potencia activa en la red, consiste en despreciar R_{cc} frente a X_{cc} , normalmente un orden de magnitud más pequeña. En este caso, se tendría:

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 + j X_{cc} \mathcal{J}_2 = 1 + j 0.07994 = 1.0032 \angle 4.57^\circ$$

con lo cual, teniendo en cuenta que nuevamente $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$, la potencia en el primario resulta:

$$S_1 = \mathcal{U}_1 \mathcal{J}_1^* = 1 + j 0.0799$$

Obviamente, el rendimiento pasa a ser del 100% debido a que el modelo no considera pérdidas en el transformador. La caída de tensión resultaría ahora $\Delta V = V_1 - V_2 = 0.32\%$, comprobándose que no es una aproximación adecuada cuando se trata de obtener las tensiones en la red con exactitud.

- 3.2.** El transformador de salida de una central térmica está constituido por cuatro unidades monofásicas intercambiables entre sí, formando un banco trifásico con una unidad de reserva. Las características de los transformadores monofásicos son las siguientes:

$$209 \text{ MVA}, \quad 20/244 \text{ kV}, \quad E_{cc} = 13\%, \quad P_{cc} = 1897 \text{ kW}$$

La conexión de las unidades se realiza en triángulo en el primario (baja tensión) y en estrella en el secundario (alta tensión), conectándose el neutro directamente a tierra. El grupo de conexión que resulta del banco trifásico es YNd11.

Determinar:

1. El modelo en p.u. del transformador trifásico.
2. La caída de tensión y el rendimiento del transformador cuando suministra 500 MW a 400 kV con un factor de potencia de 0.9 en retraso.

Resolución

Primera cuestión: con los datos proporcionados, únicamente es posible calcular la impedancia serie del transformador, Z_s , por lo que se supondrá despreciable el efecto de la impedancia Z_m .

El transformador trifásico formado por tres transformadores monofásicos conectados en triángulo en el primario y en estrella en el secundario tiene las siguientes características:

Potencia nominal:	$S_t = 3 S_m = 627 \text{ MVA}$
Tensiones nominales:	$V_{N1} = 20 \text{ kV}, V_{N2} = 244 \sqrt{3} = 422.6 \text{ kV}$
Tensión de cortocircuito:	$E_{cc} = 13\%$
Pérdidas en cortocircuito:	$P_{cc} = 3 \cdot 1897 \text{ kW}$
Intensidades nominales:	$I_{N1} = 18.1 \text{ kA}, I_{N2} = 0.857 \text{ kA}$

Los parámetros de la impedancia serie referida al primario resultan, trabajando en p.u. y con $I_1 = 1.0$:

$$Z_{cc} = \frac{E_{cc}}{I_1} = 0.13 \text{ p.u.}$$

$$R_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_1^2} = 0.00908 \text{ p.u.}$$

$$X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2} = 0.12968 \text{ p.u.}$$

Con lo cual, $Z_{cc} = R_{cc} + j X_{cc} = 0.00908 + j 0.12968 = 0.13 \angle 86^\circ$.

Cabe recordar que, debido al grupo de conexión del transformador y aunque no se incluya en el modelo del mismo, existe un desfase constructivo de 30° de adelanto de las tensiones e intensidades en el primario respecto a las del secundario.

Segunda cuestión: si el transformador trabaja proporcionando 500 MW a 400 kV con factor de potencia 0.9 ($\varphi = 25.84^\circ$), tomando como bases la potencia trifásica y las tensiones nominales del transformador trifásico, las potencias que proporciona el transformador en el lado de alta tensión serán las siguientes:

$$P_2 = 500/627 = 0.79745 \text{ p.u.} \quad Q_2 = P_2 \tan \varphi = 0.38622 \text{ p.u.}$$

$$S_2 = P_2 + j Q_2 = 0.88605 \angle \varphi$$

con lo que el transformador suministra aproximadamente un 88.6% de su potencia nominal.

La tensión en el secundario del transformador, 400 kV, teniendo en cuenta que la relación de transformación del banco trifásico proporciona una tensión base de 422.6 kV, resulta $u_2 = 0.9465 \angle 0^\circ$, origen de fase para los cálculos posteriores.

La tensión en el primario se obtiene utilizando el modelo del transformador trifásico, calculando en primer lugar la intensidad:

$$J_2 = (S_2/u_2)^* = 0.93616 \angle -25.84^\circ$$

$$u_1 = u_2 + Z_{cc} \cdot J_2 = 1.0126 \angle 5.98^\circ$$

lo que equivale a 20.25 kV en una base de 20 kV.

En este caso, como no se ha tenido en cuenta la impedancia Z_m , resulta que $J_1 = J_2$, y la potencia consumida por el transformador en el primario vale:

$$S_1 = u_1 J_1^* = 0.8054 + j 0.499 = 0.94792 \angle 31.83^\circ$$

Con lo que la potencia suministrada por el generador es de 505 MW y 313.4 Mvar, con un factor de potencia resultante de 0.85.

El rendimiento del transformador, con unas pérdidas de 5 MW, es del 99.01%, y la caída de tensión $\Delta V = V_1 - V_2 = 6.61\%$.

3.3. Un transformador trifásico de tres devanados tiene las siguientes características:

- Primario: 131 kV, 30 MVA
- Secundario: 27 kV, 30 MVA
- Terciario: 10.5 kV, 10 MVA
- Tensiones de cortocircuito referidas a 30 MVA:
 - Primario-secundario: $E_{cc} = 10\%$
 - Primario-terciario: $E_{cc} = 13\%$
 - Secundario-terciario: $E_{cc} = 15\%$
- Grupos de conexiones: YNyn0, YNd11, ynd11

Obtener el modelo equivalente del transformador y determinar la potencia total consumida por el transformador en el primario, y las tensiones en el secundario y en el terciario cuando el transformador se alimenta a 131 kV y suministra 20 MW y 8 Mvar en el secundario, y 8 MW y 2 Mvar en el terciario.

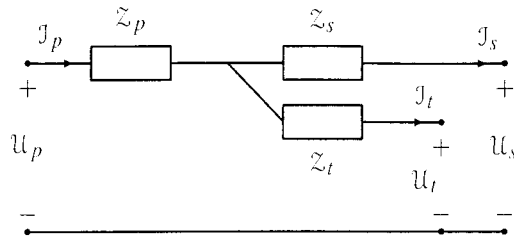


Figura 3.12 Modelo aproximado del transformador de tres devanados.

Resolución

Modelo equivalente: se utilizará el modelo de la Figura 3.12, en el que se ha supuesto que la impedancia de magnetización tiene un valor muy elevado, $Z_m \approx \infty$. Asimismo, y suponiendo que la resistencia de los devanados es despreciable frente a la reactancia (en cualquier caso, no hay datos suficientes para su cálculo), se tiene, de los ensayos en cortocircuito y teniendo en cuenta que los datos proporcionados ya están expresados en una misma base (30 MVA):

$$\begin{aligned} X_p &= 0.5 (E_{ps} + E_{pt} - E_{st}) = 0.04 \\ X_s &= 0.5 (E_{ps} + E_{st} - E_{pt}) = 0.06 \\ X_t &= 0.5 (E_{pt} + E_{st} - E_{ps}) = 0.09 \end{aligned}$$

Transformador en carga: las condiciones de funcionamiento del transformador en carga, expresadas en p.u., son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Tensión en el primario:} & \quad U_p = 1 \angle 0^\circ \\ \text{Potencia en el secundario:} & \quad S_s = 0.6667 + j 0.2667 = 0.718 \angle 21.80^\circ \\ \text{Potencia en el terciario:} & \quad S_t = 0.2667 + j 0.0667 = 0.275 \angle 14.04^\circ \end{aligned}$$

Introduciendo como incógnitas las tensiones e intensidades en secundario y terciario, y la propia intensidad del primario, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones a resolver:

- Potencias:

$$S_s = U_s J_s^* \quad S_t = U_t J_t^*$$

- Caídas de tensión:

$$\begin{aligned} U_s &= U_p - j X_p J_p - j X_s J_s \\ U_t &= U_p - j X_p J_p - j X_t J_t \end{aligned}$$

- Balance de intensidades:

$$J_p = J_s + J_t$$

Obsérvese que las anteriores ecuaciones constituyen un sistema no lineal debido a las restricciones de potencia¹.

Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado, se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned} J_p &= 0.933 - j 0.415 = 1.022 \angle -23.99^\circ \\ J_s &= 0.665 - j 0.330 = 0.743 \angle -26.39^\circ & U_s &= 0.964 - j 0.077 = 0.967 \angle -4.58^\circ \\ J_t &= 0.268 - j 0.085 = 0.281 \angle -17.64^\circ & U_t &= 0.976 - j 0.061 = 0.978 \angle -3.60^\circ \end{aligned}$$

Con lo cual, la potencia consumida en el primario resulta:

$$S_p = U_p J_p^* = 0.9333 + j 0.4153 = 1.022 \angle 23.99^\circ$$

Lo cual corresponde a 28 MW y 12.46 Mvar. Obsérvese que el transformador está sobrecargado en un 2.2% en términos de potencia nominal. Las tensiones en el secundario y en el terciario resultan 26.1 y 10.27 kV, respectivamente.

¹En concreto, el carácter no lineal de las restricciones de potencia obliga a utilizar métodos iterativos de resolución que conducen, en redes de gran dimensión, al problema conocido como *flujo de cargas*.

3.4. Dos transformadores se instalan para trabajar en paralelo en una subestación de 400/220 kV. Suponiendo un consumo total de 100 MW con factor de potencia unidad y tensión nominal en 220 kV, determinar cómo se reparten dicha potencia ambos transformadores en los siguientes casos:

1. Los dos transformadores tienen iguales características pero distinto grupo de conexión:

$$S_N = 100 \text{ MVA}, \quad 400/220 \text{ kV}, \quad E_{cc} = 10\%$$

Grupos de conexión: Yy0 e Yd11 respectivamente.

2. Los dos transformadores difieren en la relación de transformación:

- Primer transformador: $S_N = 100 \text{ MVA}$, 400/220 kV, $E_{cc} = 10\%$ (referida a 400 kV) y grupo de conexión Yy0.

- Segundo transformador: $S_N = 100 \text{ MVA}$, 380/220 kV, $E_{cc} = 11.1\%$ (referida a 380 kV) y grupo de conexión Yy0.

3. Los dos transformadores tienen distinta potencia nominal y tensión de cortocircuito:

- Primer transformador: $S_N = 100 \text{ MVA}$, 400/220 kV, $E_{cc} = 12\%$ y grupo de conexión Yy0.

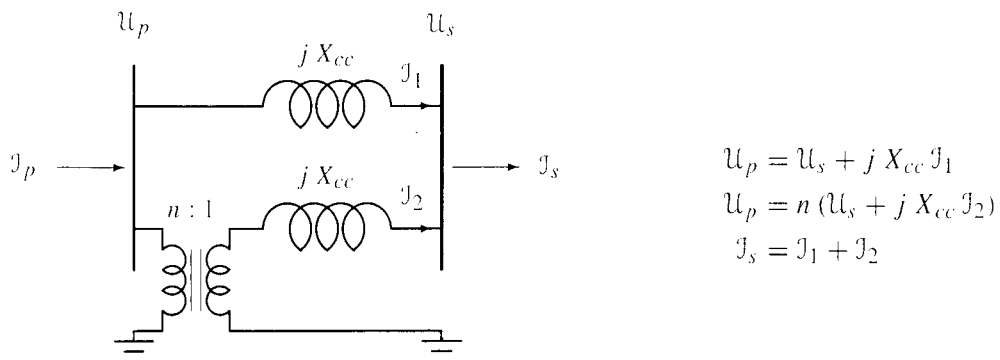
- Segundo transformador: $S_N = 50 \text{ MVA}$, 400/220 kV, $E_{cc} = 6\%$ y grupo de conexión Yy0.

Resolución

En todos los casos, la potencia base será de 100 MVA y las tensiones nominales de 400 y 220 kV en el primario y secundario de los transformadores respectivamente. Con ello, las intensidades nominales resultan:

$$I_{N_p} = \frac{100}{\sqrt{3} \cdot 400} = 0.144 \text{ kA} \quad \text{y} \quad I_{N_s} = \frac{100}{\sqrt{3} \cdot 220} = 0.262 \text{ kA}$$

Primer caso: la reactancia de los dos transformadores es la misma, $X_{cc} = 0.1 \text{ p.u.}$, no siendo necesario ningún cambio de base. Por otra parte, en la conexión de los dos transformadores en paralelo hay que tener en cuenta que el segundo transformador introduce un desfase constructivo de 30° entre las tensiones del primario y del secundario. Definiendo un operador complejo que introduzca dicho desfase, $n = 1 \angle -30^\circ$, se obtienen las siguientes relaciones en ambos transformadores:



Por otra parte, en el lado de 220 kV se tiene que:

$$U_s = 1 \angle 0^\circ \quad S_s = 1 \angle 0^\circ \quad \implies \quad J_s = 1 \angle 0^\circ$$

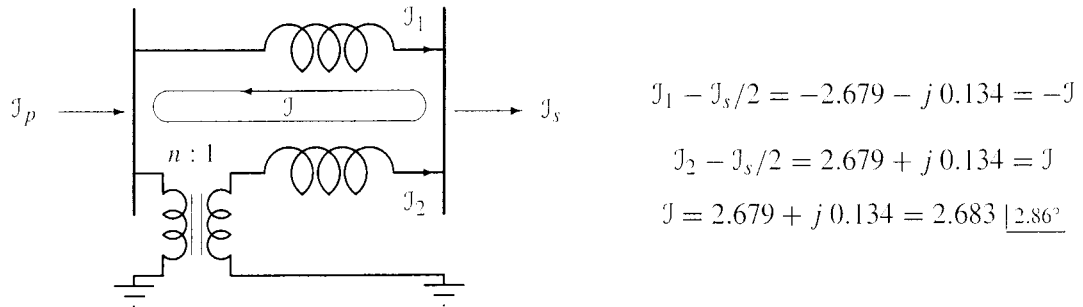
condiciones que, junto a las ecuaciones anteriores permiten resolver el problema:

$$J_1 = -2.179 - j 0.134 = 2.184 \angle -176.48^\circ \quad J_2 = 3.179 + j 0.134 = 3.182 \angle 2.41^\circ$$

$$U_p = 1.013 - j 0.218 = 1.037 \angle -12.14^\circ$$

Puede observarse que ambos transformadores trabajan con intensidades muy elevadas, dando lugar a potencias de 218 y 318 MVA respectivamente, situación obviamente insostenible en régimen permanente y que sería rápidamente despejada por las protecciones.

En realidad, existe una intensidad muy elevada que circula únicamente en la malla formada por ambos transformadores y que es causada por el desfase. Este efecto puede comprobarse restando la mitad de J_s (los dos transformadores se reparten la potencia suministrada a partes iguales al tener la misma impedancia) a la intensidad de cada transformador:



Segundo caso: en primer lugar, es necesario realizar un cambio de base en la tensión de cortocircuito del segundo transformador, expresada en una base de 380 kV:

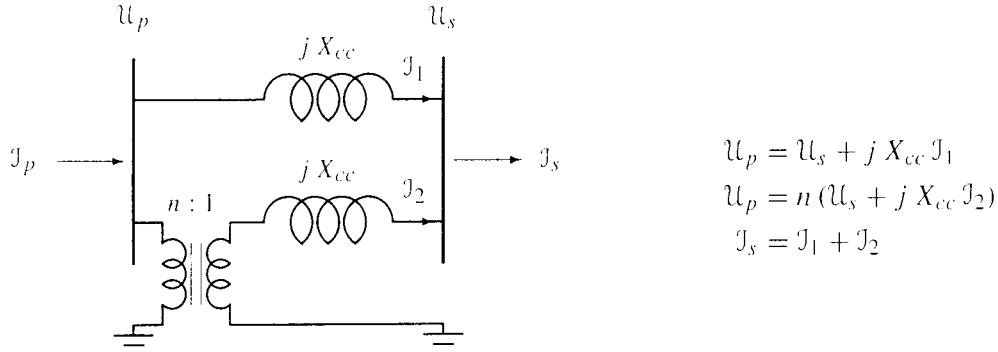
$$X_{cc2} = 0.111 \left(\frac{380}{400} \right)^2 = 0.1$$

por lo que ambos transformadores tienen igual tensión de cortocircuito en una misma base.

Por otra parte, en la conexión de los dos transformadores en paralelo hay que tener ahora en cuenta que el segundo transformador introduce una relación de transformación distinta a la nominal adoptada (400/220 kV):

$$n = 380 : 220 \text{ kV} = 380/400 : 220/220 = 0.95 : 1 \text{ en p.u.}$$

El modelo de los transformadores en paralelo, así como las ecuaciones que proporciona dicho modelo, resultan:

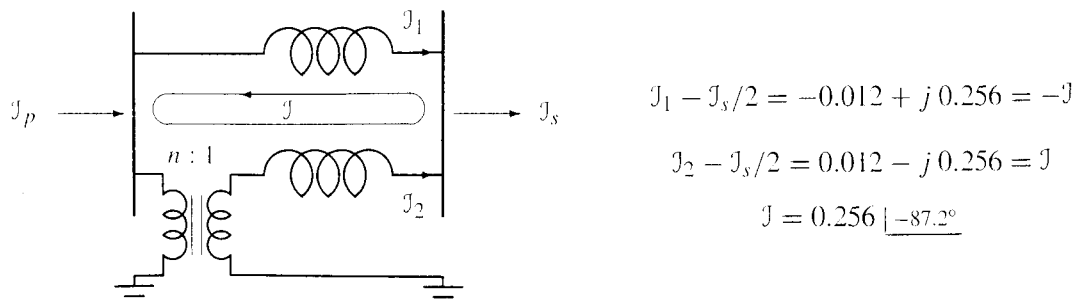


Ecuaciones que, junto a las condiciones en el lado de 220 kV, permiten resolver el problema:

$$J_1 = 0.488 + j 0.256 = 0.551 \angle 27.7^\circ \quad J_2 = 0.512 - j 0.256 = 0.573 \angle -26.6^\circ$$

$$U_p = 0.974 + j 0.049 = 0.976 \angle 2.9^\circ$$

En este caso, se observa que las intensidades de los dos transformadores son elevadas para la potencia transportada. Este hecho se justifica porque, al igual que en el caso anterior, existe una intensidad que circula únicamente en la malla formada por ambos transformadores, causada por la distinta relación de transformación. Restando la mitad de J_2 a la intensidad de cada transformador:



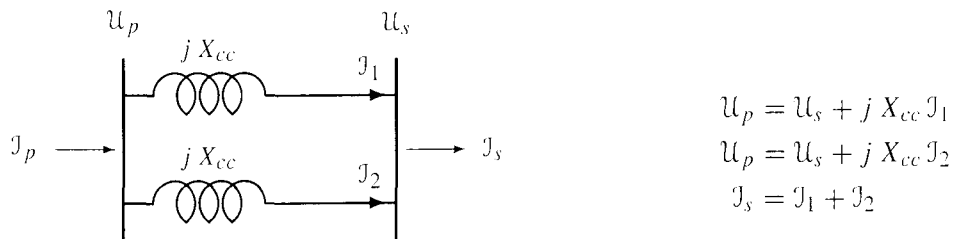
Intensidad cuyo único efecto es provocar calentamientos y sobrecargas en ambos transformadores.

Tercer caso: nuevamente es necesario realizar un cambio de base en la tensión de cortocircuito del segundo transformador, en este caso expresada respecto a su potencia nominal (50 MVA):

$$X_{cc2} = 0.06 \frac{100}{50} = 0.12$$

Con lo que resulta que los dos transformadores tienen igual tensión de cortocircuito en la base de 100 MVA.

El modelo de los transformadores en paralelo, así como las ecuaciones que proporciona dicho modelo, resulta:



Obviamente, ambos transformadores se reparten la potencia total a partes iguales:

$$J_1 = 0.5 \angle 0^\circ \quad J_2 = 0.5 \angle 0^\circ \quad U_p = 1.0 + j 0.06 = 1.002 \angle 3.43^\circ$$

Dicho reparto no es deseable pues el transformador de menor capacidad está al límite ($S_2 = 50$ MVA) y el primer transformador está a media carga. Compruebe el lector que si ambos transformadores hubiesen tenido igual tensión de cortocircuito en tanto por ciento referidas a sus respectivas potencias nominales, el reparto de potencia hubiese sido en proporción a dichas potencias nominales, situación siempre deseable al conectar dos transformadores en paralelo.

3.5. El transformador trifásico de servicios auxiliares de una central térmica tiene las siguientes características:

$$30 \text{ MVA}, \quad 20/6.6 \text{ kV}, \quad E_{cc} = 8\%, \quad \text{Grupo de conexión Dyn11}$$

El transformador dispone de 21 tomas de regulación que permiten cambiar la relación de transformación en incrementos del 1%.

Si la tensión en el lado de alta es de 18.5 kV, determinar la toma en que deberá trabajar para tener la tensión nominal en el lado de baja tensión trabajando a plena carga y factor de potencia unidad.

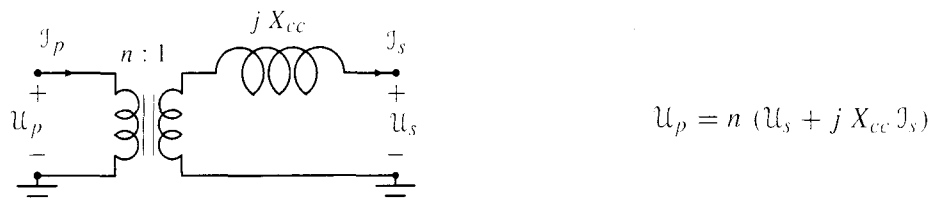
Resolución

Trabajando en p.u. con los valores nominales del transformador, las condiciones en carga son las siguientes:

$$U_s = 1 \angle 0^\circ \quad J_s = 1 \angle 0^\circ \quad S_s = 1 \angle 0^\circ$$

Asimismo, $V_p = 0.925$.

Del modelo del transformador con tomas de regulación se obtiene la siguiente ecuación:



Además, es evidente que $J_p = J_s/n$.

Trabajando con los módulos en la ecuación del transformador se tiene que:

$$|U_p| = n |U_s + j X_{cc} J_s|$$

ecuación que permite obtener la relación de transformación necesaria, resultando $n = 0.922$. Aproximando n por el valor discreto más próximo (el transformador dispone de 21 tomas que permiten variar la relación de transformación en $\pm 10\%$ en incrementos del 1%) se tiene que $n = 0.92$, lo que corresponde a la tercera toma.

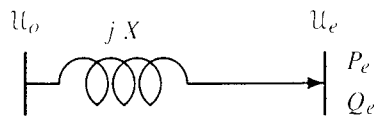
Con la necesaria discretización de la relación de transformación, la tensión en el secundario resultaría en realidad $V_s = 1.01 = 6.666$ kV.

3.6. La interconexión entre dos sistemas eléctricos se realiza mediante dos líneas de 400 kV de tensión que trabajan en paralelo, con capacidades máximas de transporte de 1200 y 800 MVA respectivamente. Las líneas se modelarán mediante sus respectivas reactancias, 0.024 y 0.02 en p.u. en una base de 100 MVA y 400 kV, y las tensiones en las subestaciones de partida y llegada se mantendrán a 400 kV mediante la adecuada inyección de potencia reactiva.

1. Si ambas líneas transportan 1500 MW entre los dos sistemas, determinar la carga de cada línea.
2. Para poder controlar adecuadamente el reparto de potencia entre ambas líneas, se instala un transformador con desplazamiento de fase en el entronque de la segunda línea con la subestación de llegada. Si las características del transformador son 800 MVA, 400/400 kV y $E_{cc} = 2\%$, determinar el desfase que deberá introducir para que se puedan transportar 2000 MW sin que se produzcan sobrecargas.

Resolución

Para simplificar la resolución de este problema, es conveniente utilizar las expresiones de las potencias activa y reactiva transmitida a través de una reactancia cuando se conocen las tensiones en sus extremos $U_e = V_e \angle 0^\circ$ y $U_o = V_o \angle \delta$:



$$P_e = \frac{V_o \cdot V_e}{X} \sin \delta$$

$$Q_e = \frac{V_o \cdot V_e}{X} \cos \delta - \frac{V_e^2}{X}$$

En este problema, $V_o = V_e = 1$ y el origen de fases se fijará en la tensión de la subestación receptora, $U_e = 1 \angle 0^\circ$.

Primer caso: las dos líneas en paralelo se comportan como una reactancia equivalente de valor $X = (X_1 \cdot X_2)/(X_1 + X_2) = 0.0109$. Como la potencia total transportada por ambas líneas es de 15 en p.u.:

$$P_e = 15 = \frac{1}{X} \sin \delta \quad \Rightarrow \quad \delta = 9.42^\circ$$

Con ello, la potencia activa transportada por cada línea resulta:

$$P_{e1} = \frac{1}{X_1} \sin \delta = 6.82 \quad P_{e2} = \frac{1}{X_2} \sin \delta = 8.18$$

Se puede observar que la segunda línea está sobrecargada (818 MW con un máximo de 800) mientras que la primera línea trabaja a un 57%.

La sobrecarga de la línea se ve agravada si se tiene en cuenta la potencia reactiva en el extremo:

$$Q_{e2} = \frac{1}{X_2} \cos \delta - \frac{1}{X_2} = -0.674 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 8.21$$

Es posible calcular asimismo las potencias reactivas necesarias para mantener las tensiones al valor nominal:

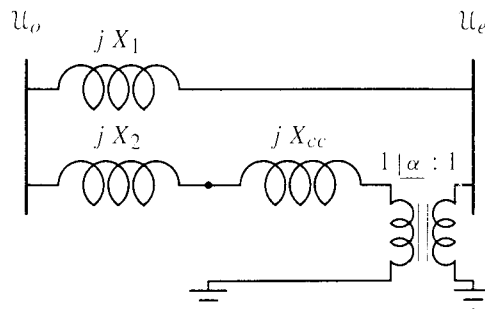
$$Q_e = \frac{1}{X} \cos \delta - \frac{1}{X} = -1.24 \quad Q_o = \frac{1}{X} \cos(-\delta) - \frac{1}{X} = -1.24$$

Es decir, se necesita inyectar 124 Mvar en ambas subestaciones.

Segundo caso: es necesario realizar en primer lugar un cambio de base en la reactancia del transformador, expresada respecto a 800 MVA:

$$X_{cc} = 0.02 (100/800) = 0.0025$$

La situación, utilizando el modelo del transformador desfasador y tras referir su impedancia al primario, es la que se muestra a continuación:

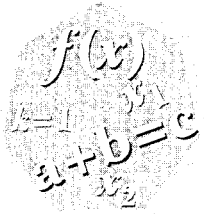


$$P_{e1} = \frac{1}{X_1} \text{sen } \delta$$

$$P_{e2} = \frac{1}{X_2 + X_{cc}} \text{sen}(\delta + \alpha)$$

Imponiendo que el reparto se realice según la capacidad de cada línea, $P_1 = 12$ y $P_2 = 8$, las ecuaciones anteriores proporcionan los desfases: $\delta = 16.74^\circ$ y $\alpha = -6.37^\circ$. Será necesario, por tanto, un transformador que permita introducir un desfase máximo de -6.37° .

No obstante, compruebe el lector que aparecerán leves sobrecargas en ambas líneas debidas a las potencias reactivas tanto en el origen como en el extremo.



LÍNEAS

Una línea trifásica equilibrada viene caracterizada, a secuencia directa, por los parámetros unitarios siguientes:

- Impedancia serie o longitudinal: $Z_1 = R_1 + jL_1\omega$ (Ω/km).
- Admitancia *shunt* o transversal: $Y_1 = G_1 + jC_1\omega$ (S/km).

así como por su longitud l . Usualmente, y así se hará en lo sucesivo, se considera que $G_1 = 0$.

Aplicando las leyes de Kirchhoff, y considerando a la línea como una bipuerta de parámetros distribuidos, la tensión e intensidad absorbida en el extremo receptor, V_r e J_r , y la tensión e intensidad inyectada en el extremo emisor, V_e e J_e , están relacionadas mediante la siguiente matriz de parámetros de cadena (ABCD):

$$\begin{bmatrix} V_e \\ J_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ J_r \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde:

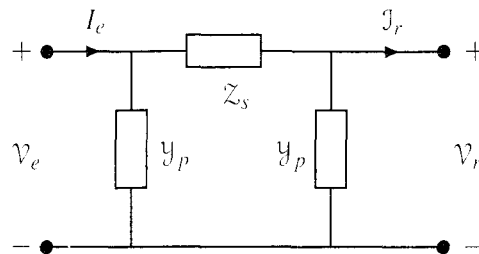
- $Z_0 = \sqrt{Z_1/Y_1}$ es la denominada *impedancia natural* o *característica*, expresada en Ω .
- $\gamma = \sqrt{Z_1 Y_1} = \alpha + j\beta$ es la *constante de propagación*, expresada en km^{-1} . Su parte real, α , se denomina *coeficiente de atenuación* y su parte imaginaria, β , *constante de fase*.

Dado que en la mayoría de aplicaciones se utiliza un análisis nodal, también resulta conveniente caracterizar a la línea mediante su matriz de admitancias, bloque constructivo básico de la matriz de admitancias de nudos del sistema:

$$\begin{bmatrix} J_e \\ -J_r \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_0 \sinh(\gamma l)} \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & -1 \\ -1 & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_r \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

La expresión anterior conduce al modelo en π mostrado en la Figura 4.1, donde:

$$Z_s = Z_1 l \cdot \frac{\sinh(\gamma l)}{\gamma l} \quad ; \quad Y_p = \frac{Y_1 l}{2} \cdot \frac{\tanh(\gamma l/2)}{\gamma l/2} \quad (4.3)$$

Figura 4.1 Modelo en π de una línea.

En líneas de transporte las pérdidas son relativamente pequeñas, y para determinados tipos de análisis pueden despreciarse. Resulta así un modelo que se obtiene haciendo $R_1 = G_1 = 0$ en las expresiones obtenidas en la sección anterior, con lo cual:

$$Z_0 = R_0 = \sqrt{L_1/C_1} \quad ; \quad \gamma = j\omega\sqrt{L_1C_1} = j\beta \quad (4.4)$$

es decir, la impedancia característica es puramente resistiva y la constante de propagación no tiene parte real (atenuación nula). De ese modo, la Ecuación (4.1) se reduce a:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & jR_0 \sin(\beta l) \\ \frac{j}{R_0} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Si en el extremo receptor se conecta una carga resistiva de valor R , la primera de las ecuaciones anteriores puede reescribirse como sigue:

$$V_e = V_r \exp(j\beta l) + j(R_0 - R)I_r \sin \beta l \quad (4.6)$$

Nótese que, haciendo $l = x$ en la ecuación anterior, se obtiene la tensión V_x a una distancia arbitraria x desde el extremo receptor.

El régimen de trabajo de una línea sin pérdidas se reduce, por tanto, a uno de los tres siguientes:

- $R = R_0$, en cuyo caso $V_x = V_r$. El perfil de tensiones a lo largo de la línea es plano (sólo existe un desfase βx), y el balance interno de reactiva es perfecto (la reactiva generada por la capacidad coincide con la consumida por la inductancia). Se dice que, en estas condiciones, la línea alimenta a su *potencia natural* o *característica*, dada por $P_0 = V_r^2/R_0$. Además, desde cualquier punto de la línea se ve una impedancia equivalente igual a su resistencia característica.
- $R < R_0$ o $P_r > P_0$, en cuyo caso $V_x > V_r$. Esto significa que transmitir una potencia activa mayor que la potencia natural requiere una caída de tensión a lo largo de la línea, y un aporte de potencia reactiva en el extremo emisor (en la línea prepondera el efecto inductivo).
- $R > R_0$, o $P_r < P_0$, en cuyo caso $V_x < V_r$. La línea se comporta como un condensador neto (exceso de reactiva), y la tensión en el extremo receptor de la línea es más elevada que en cualquier otro punto (efecto Ferranti). Esto ocurre típicamente en las horas de poco consumo, y sobre todo en líneas abiertas por un extremo.

En la Tabla 4.1 se muestran valores típicos de la potencia natural para diferentes niveles de tensión. Nótese que la potencia natural no depende de la longitud de la línea, sino que crece aproximadamente con el cuadrado de la tensión de servicio, al ser R_0 un valor relativamente constante para líneas aéreas ($R_0 \approx 300 \div 400 \Omega$).

Para líneas de hasta 200 km puede utilizarse la siguiente aproximación:

$$Z_s \approx Z_1 l = R + jX \quad ; \quad y_p \approx \frac{y_1 l}{2} = jB_c/2 \quad (4.7)$$

kV	R_0 (Ω)	P_0 (MW)
66	385	10
132	390	45
220	400	130
400	325	490

Tabla 4.1 Potencia natural para diferentes tensiones nominales.

Esto conduce a un modelo en π de parámetros concentrados, cuya impedancia serie y admitancia paralelo se obtienen multiplicando los valores unitarios respectivos por la longitud de la línea.

Para líneas aún más cortas, normalmente de menores niveles de tensión, se puede despreciar incluso el efecto capacitivo de la línea, reteniendo en el modelo tan sólo la impedancia serie ($Y_p \approx 0$).

RELACIONES TENSION-POTENCIA

Tomando como origen de fases la tensión en el extremo receptor ($V_r = V_r$), expresando la tensión en el otro extremo como $V_e = V_e \angle \delta$, y denotando la admitancia serie como $Y_s = G - jB$ se obtienen las siguientes expresiones para la potencia en ambos extremos (véase la notación utilizada en la Figura 4.2):

- Extremo receptor:

$$P_r = V_r V_e [G \cos \delta + B \sin \delta] - V_r^2 G \tag{4.8}$$

$$Q_r = V_r V_e [B \cos \delta - G \sin \delta] - V_r^2 (B - B_c/2) \tag{4.9}$$

- Extremo emisor:

$$P_e = V_r V_e [B \sin \delta - G \cos \delta] + V_e^2 G \tag{4.10}$$

$$Q_e = -V_r V_e [B \cos \delta + G \sin \delta] + V_e^2 (B - B_c/2) \tag{4.11}$$

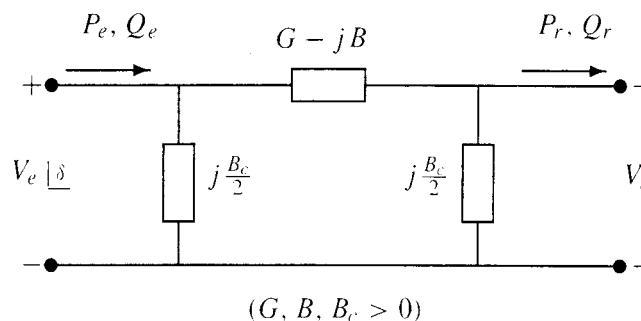


Figura 4.2 Potencias y tensiones en una línea de parámetros concentrados.

Cuando se desprecia la capacidad de la línea se obtienen expresiones más compactas. Para el extremo receptor:

$$P_r - \frac{R}{X} Q_r = \frac{V_r V_e}{X} \sin \delta \tag{4.12}$$

$$Q_r + \frac{R}{X} P_r = \frac{V_r}{X} (V_e \cos \delta - V_r)$$

y para el extremo emisor,

$$P_e - \frac{R}{X} Q_e = \frac{V_r V_e}{X} \sin \delta \tag{4.13}$$

$$Q_e + \frac{R}{X} P_e = \frac{V_e}{X} (V_e - V_r \cos \delta)$$

Obsérvese que, cuando el cociente R/X es muy pequeño, la potencia activa transmitida depende sobre todo del desfase entre ambas tensiones, δ , mientras que la potencia reactiva viene determinada fundamentalmente por la diferencia de sus módulos, $V_e - V_r$. También debe destacarse que el término $P - RQ/X$ toma el mismo valor en los dos extremos de la línea.

Se conoce como *regulación de tensión* de una línea, en p.u., al cociente:

$$\Delta V = \frac{V_{r, \text{vacío}} - V_{r, \text{carga}}}{V_{r, \text{carga}}}$$

es decir, a la caída de tensión que se produce en el extremo receptor al pasar de vacío a plena carga. Si se ignora la capacidad de la línea, y por tanto el posible efecto Ferranti, puede escribirse de forma aproximada que:

$$\Delta V \approx \frac{V_e - V_r}{V_r} \approx \frac{X}{V_r^2} \left(Q_r + \frac{R}{X} P_r \right)$$

Es decir, el transporte de grandes cantidades de potencia reactiva provoca o requiere fuertes caídas de tensión. Sin embargo, en líneas de menos de 50 kV los valores de R y X son del mismo orden, con lo que el efecto de la potencia activa y reactiva sobre la caída de tensión es comparable.

Por lo que respecta a las pérdidas Joule en la línea, éstas se obtienen por diferencia entre P_e y P_r , resultando:

$$P_{\text{Joule}} = G \left(V_e^2 + V_r^2 - 2V_e V_r \cos \delta \right)$$

La siguiente expresión alternativa es válida cuando se desprecia la capacidad:

$$P_{\text{Joule}} = I^2 R = \frac{P_r^2 + Q_r^2}{V_r^2} \cdot R$$

Nótese que, para una potencia dada, tanto la regulación de tensión como las pérdidas disminuyen con el cuadrado de la tensión de servicio.

La máxima potencia que puede transmitirse por una línea hasta el extremo receptor, desde un punto de vista estático, depende fundamentalmente de la impedancia serie (proporcional a la longitud) y de la tensión de servicio, pero también del factor de potencia de la carga y de la presencia de dispositivos capaces de regular la tensión mediante una inyección apropiada de potencia reactiva. En lo que sigue se analizarán tres casos distintos, dependiendo de dónde se controle la tensión.

Por simplicidad, se ignorará el efecto capacitivo de la línea, por lo que son de aplicación (4.12) y (4.13). Dichas ecuaciones se simplifican a su vez notablemente si se utilizan las siguientes magnitudes normalizadas:

$$V_n = V_r / V_e \quad ; \quad P_n = P / S_{\text{cet}} \quad ; \quad Q_n = Q / S_{\text{cet}}$$

donde

$$S_{\text{cet}} = \frac{V_e^2}{X}$$

se conoce como *capacidad estática de transporte*. Para las magnitudes del extremo receptor esta normalización conduce a:

$$\begin{aligned} P_{rn} - \frac{R}{X} Q_{rn} &= V_n \sin \delta \\ Q_{rn} + \frac{R}{X} P_{rn} &= V_n (\cos \delta - V_n) \end{aligned} \quad (4.14)$$

y para el extremo emisor

$$\begin{aligned} P_{en} - \frac{R}{X} Q_{en} &= V_n \sin \delta \\ Q_{en} + \frac{R}{X} P_{en} &= 1 - V_n \cos \delta \end{aligned} \quad (4.15)$$

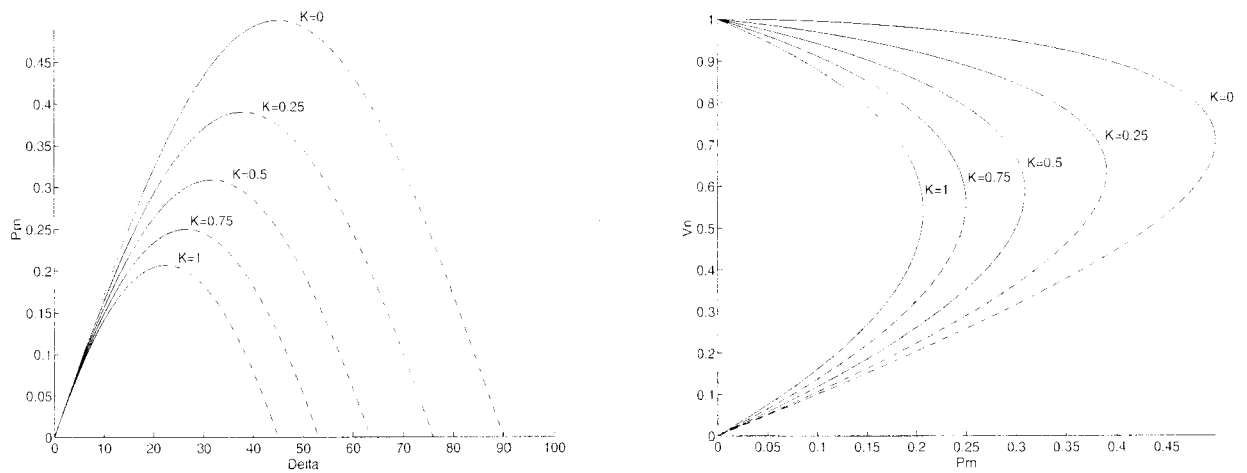


Figura 4.3 Curvas $P-\delta$ y $V-P$ para tensión regulada en un extremo.

TENSIÓN CONSTANTE EN EL EXTREMO EMISOR

Se asume que en el extremo emisor hay un elemento, por ejemplo un generador, que mantiene la tensión constante al valor V_e con independencia de la potencia transmitida. Dada esta tensión, es posible relacionar V_n y δ con las potencias en ambos extremos.

En primer lugar se considerará el caso de carga perfectamente compensada ($Q_{rn} = 0$). En este caso resultan las siguientes ecuaciones:

$$P_{rn} = \frac{1}{2} \sin 2\delta - k \cdot \sin^2 \delta$$

$$V_n^2 = \left(\frac{1}{2} - k P_{rn} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (k + P_{rn}) P_{rn}}$$

donde $k = R/X$. En la Figura 4.3 se representan las curvas $P_{rn}-\delta$ y V_n-P_{rn} para este caso.

En la curva $P_{rn}-\delta$ puede comprobarse que, si se ignora la resistencia ($k = 0$), la capacidad máxima de transporte viene dada por:

$$P_{rn}^{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \Rightarrow P_r^{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} S_{cet}$$

y se obtiene para $\delta = 45^\circ$. Desde un punto de vista estático, el funcionamiento para ángulos mayores carece de sentido. Por otra parte, valores no nulos de resistencia reducen aún más la máxima potencia transmisible. Por ejemplo, con $R = 0.75X$ la potencia máxima se reduce a la mitad de la obtenida con $R = 0$. Los mismos valores de potencia máxima se obtienen de la curva V_n-P_{rn} , donde puede apreciarse además la caída de tensión adicional que producen valores de resistencia no nulos. De (4.15), con $k = 0$, se concluye que para transmitir la máxima potencia debe inyectarse una cantidad de potencia reactiva idéntica en el extremo emisor ($Q_{en} = 0.5$).

Resulta fácil también analizar el caso con factor de potencia constante en la carga cuando $R = 0$ (línea sin pérdidas). Puede demostrarse que, en este caso, las curvas de la Figura 4.3 siguen siendo válidas si k se interpreta ahora como $k = Q_r/P_r$.

TENSIÓN CONSTANTE EN AMBOS EXTREMOS

Se asume que en ambos extremos de la línea existen dispositivos que mantienen la tensión respectiva a un valor constante, independientemente de la potencia transmitida. Estos dispositivos deben, por tanto, ser capaces de adaptar dinámicamente su potencia reactiva a la potencia activa transmitida. La expresión de la potencia en el extremo receptor viene dada en este caso por:

$$P_{rn} (1 + k^2) = V_n \sin \delta + k V_n (\cos \delta - V_n)$$

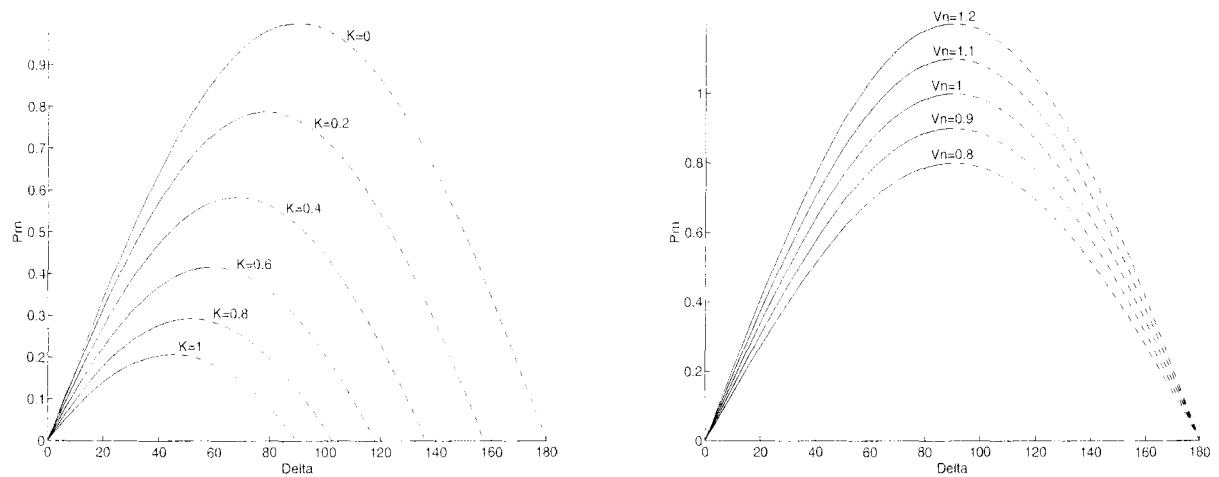


Figura 4.4 Curvas P - δ para tensión regulada en ambos extremos.

La Figura 4.4 muestra la relación P_{rn} - δ en función de k para $V_n = 1$ (izquierda), así como en función de V_n para $k = 0$ (derecha).

Puede apreciarse que, manteniendo la tensión en el extremo receptor al mismo valor que en el emisor, la máxima potencia transmisible vale (suponiendo $k = 0$):

$$P_{rn}^{\text{máx}} = 1 \Rightarrow P_r^{\text{máx}} = S_{\text{cct}}$$

y se produce para $\delta = 90^\circ$. Es decir, se duplica la capacidad de transporte respecto a la obtenida cuando se deja variar libremente la tensión en el extremo receptor, así como el ángulo máximo. Este límite teórico se consigue sin embargo a costa de inyectar enormes cantidades de potencia reactiva en ambos extremos ($Q_{en} = -Q_{rn} = 1$).

Como en el caso anterior, la capacidad de transporte disminuye conforme aumenta la resistencia. Para $R = X$, a pesar de mantener constante la tensión en la carga, la máxima potencia transmisible apenas llega a $0.2S_{\text{cct}}$, y el ángulo máximo ronda los 45° . Por otra parte, controlando la tensión en la carga se consigue variar moderadamente la capacidad de transporte.

TENSIÓN CONSTANTE EN EL PUNTO INTERMEDIO

Cuando se regula la tensión en ambos extremos de la línea a un valor constante, la máxima caída de tensión (o subida, si se produce el efecto Ferranti) tiene lugar en el punto intermedio de la misma. De hecho, las gráficas de la Figura 4.3 se aplican a este punto si la longitud de la línea se divide por dos. Por tanto, controlando la tensión de este punto crítico, además de las de los dos extremos, se mejorará notablemente la capacidad de transporte de una línea larga, si aún estamos lejos del límite térmico. En la Figura 4.5 se muestran las curvas P_{rn} - δ y Q_{en} - P_{rn} para este caso, con $R = 0$.

Como puede apreciarse, la línea es capaz de soportar, en teoría, ángulos de hasta 180° , alcanzándose una potencia máxima de:

$$P_{rn}^{\text{máx}} = 2 \Rightarrow P_r^{\text{máx}} = 2S_{\text{cct}}$$

Sin embargo, alcanzar este máximo teórico requeriría inyectar la misma cantidad de potencia reactiva en ambos extremos ($Q_{en} = -Q_{rn} = 2$), y lo que es peor, duplicar la potencia reactiva inyectada en el punto medio ($Q_{mn} = 4$). En la práctica, por motivos económicos, los compensadores de reactiva no se dimensionan a tales valores y llegan a saturarse, lo que reduce el valor máximo de potencia transmisible.

De este modo, los "cuellos de botella" para el transporte de potencia se localizarían ahora en el primer y tercer cuarto de longitud de la línea, cuya tensión teóricamente también podría regularse. En el límite, se lograría una línea con perfil cuasi plano, es decir, una línea ajustada en todo instante a la potencia que transporta. La curva P - δ para este caso idealizado, que tiende a una recta, se muestra con la letra D en la Figura 4.6, correspondiendo las letras A, B y C a los tres casos analizados anteriormente.

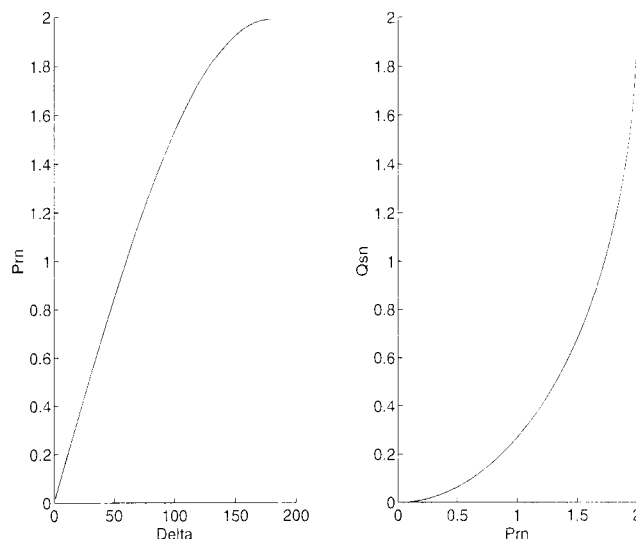


Figura 4.5 Curvas $P-\delta$ y $Q-P$ para tensión regulada en ambos extremos y punto medio.

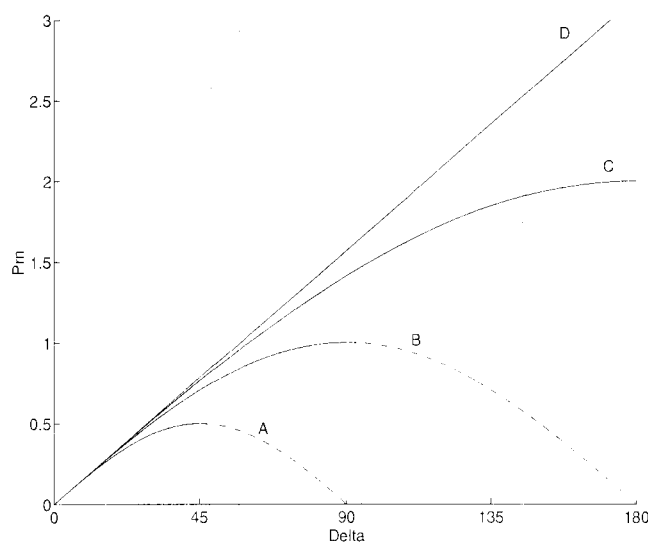


Figura 4.6 Comparación de curvas $P-\delta$ conforme se incrementa el número de puntos regulados en tensión.

Obsérvese que, para valores de ángulos menores de 45° , que son los utilizados en la práctica, apenas hay diferencias entre C y D, siendo poco significativa también la mejora entre B y C. Por tanto, el control de tensión en el punto intermedio es poco usual, y obedece más bien a motivos relacionados con la seguridad dinámica de la red.

4.7 COMPENSACIÓN EN SERIE

De los casos analizados en la sección anterior se concluye que la capacidad de transporte de una línea de corriente alterna es proporcional a S_{cer} , es decir, crece con el cuadrado de la tensión y es inversamente proporcional a la reactancia serie de la misma. Otros factores, como la presencia de elementos de compensación de reactiva regulando la tensión, afectan al coeficiente de proporcionalidad y al desfase máximo admisible entre los dos extremos.

Por tanto, para una tensión dada, la capacidad de transporte puede mejorarse notablemente si se disminuye la reactancia de la línea (precisamente la principal ventaja de las líneas de corriente continua es que su reactancia es nula), lo cual puede lograrse insertando en serie con la línea un condensador. Ignorando la resistencia, relativamente pequeña en líneas de muy alta tensión, la potencia transmitida viene dada por:

$$P_r = \frac{V_r V_e}{X - X_c} \sin \delta$$

siendo X_c el valor absoluto de la reactancia del condensador. Debido a riesgos de resonancia subsíncrona, y a otras complicaciones de tipo práctico relacionadas con las protecciones, esta técnica está mucho menos extendida que la compensación *shunt* explicada en epígrafes anteriores, a pesar de que se logran mayores incrementos de potencia transmitida por cada Mvar instalado.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 4.1.** Para una frecuencia de 50 Hz hallar el modelo en π de la línea cuyas características son las indicadas en la Tabla 4.2, utilizando parámetros distribuidos y parámetros concentrados.

Parámetro	Valor
Inductancia L	$1.096 \cdot 10^{-3}$ H/km
Capacidad C	$1.033 \cdot 10^{-8}$ F/km
Resistencia R	0.0329 Ω /km
Longitud l	800 km

Tabla 4.2 Datos de la línea del Problema 4.1.

Resolución

La impedancia serie y la admitancia paralelo de un kilómetro de línea valen,

$$\zeta_1 = R + jX = R + \omega Lj = 0.0329 + 0.344j = 0.346 \angle 84.542 \frac{\Omega}{\text{km}}$$

$$y_1 = G + jB = \omega Cj = 3.245 \cdot 10^{-6}j = 3.245 \cdot 10^{-6} \angle 90 \frac{\text{S}}{\text{km}}$$

A partir de ellas es posible determinar la impedancia característica ζ_0 y la constante de propagación γ de la línea,

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{\zeta_1}{y_1}} = 326.099 - 15.544j = 326.469 \angle -2.729 \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{\zeta_1 y_1} = 5.044 \cdot 10^{-5} + 1.058 \cdot 10^{-3}j = 1.059 \cdot 10^{-3} \angle 87.271 \text{ km}^{-1}$$

En primer lugar se determinarán los valores característicos del modelo de parámetros concentrados. La impedancia serie ζ_s^{con} y la admitancia paralelo y_s^{con} , asociadas a este modelo y representadas en la Figura 4.1, son:

$$\zeta_s^{\text{con}} = \zeta_1 l = 26.32 + 275.455j = 276.709 \angle 84.542 \Omega$$

$$y_s^{\text{con}} = \frac{y_1}{2} l = 1.298 \cdot 10^{-3}j = 1.298 \cdot 10^{-3} \angle 90 \text{ S}$$

Para conocer el error cometido al adoptar este modelo para la línea se han de obtener los valores asociados al modelo en π de parámetros distribuidos:

$$z_s^{\text{dis}} = z_1 l \frac{\sinh(\gamma l)}{\gamma l} = 20.374 + 244.046j = 244.895 \angle 85.228^\circ \Omega$$

$$y_s^{\text{dis}} = \frac{y_1}{2} l \frac{\tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right)}{\gamma l/2} = 8.576 \cdot 10^{-6} + 1.381 \cdot 10^{-3}j = 1.381 \cdot 10^{-3} \angle 89.644^\circ \text{ S}$$

El tanto por ciento de error cometido en la reactancia serie de la línea, parámetro más destacado en las líneas de transporte, es de un 12.87%.

En las Figuras 4.7 y 4.8 se muestran los valores obtenidos utilizando parámetros concentrados y parámetros distribuidos respectivamente.

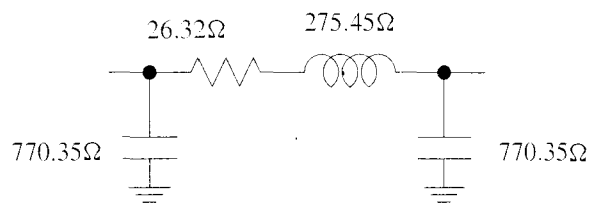


Figura 4.7 Esquema unifilar de la red del Problema 4.1 utilizando un modelo de parámetros concentrados.

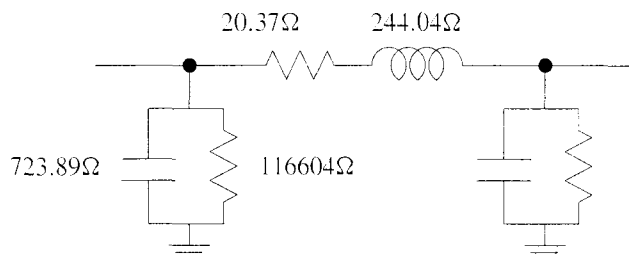


Figura 4.8 Esquema unifilar de la red del Problema 4.1 utilizando un modelo de parámetros distribuidos.

- 4.2.** La línea dúplex de 380 kV que une Guadalquivir Medio con Tajo de la Encantada tiene una longitud total de 140 km y las características indicadas en la Tabla 4.3.

Parámetro	Valor
Inductancia L	1 mH/km
Capacidad C	12 nF/km
Resistencia R	0.07 Ω /km

Tabla 4.3 Datos de la línea del Problema 4.2.

Utilizando un modelo de parámetros distribuidos para la línea, determinar la caída de tensión en la misma cuando se suministran 900 A a una carga inductiva de factor de potencia 0.8 a la tensión nominal (frecuencia 50 Hz).

Calcular asimismo la eficiencia de la transmisión y el error que se comete al utilizar el modelo en π de parámetros concentrados.

Resolución

Con la impedancia serie y la admitancia paralelo de un kilómetro de línea:

$$\underline{z}_1 = R + j\omega L = R + 2\pi fLj = 0.07 + 0.314j = 0.322 \underline{77.439} \frac{\Omega}{\text{km}}$$

$$\underline{y}_1 = G + j\omega C = 2\pi fC = 3.77 \cdot 10^{-6}j = 3.77 \cdot 10^{-6} \underline{90} \frac{\text{S}}{\text{km}}$$

se determinan la impedancia característica \underline{z}_o y la constante de propagación γ de la misma,

$$\underline{z}_o = \sqrt{\frac{\underline{z}_1}{\underline{y}_1}} = 290.44 - 31.965j = 292.193 \underline{-6.281} \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{\underline{z}_1 \underline{y}_1} = 1.205 \cdot 10^{-4} + 1.095 \cdot 10^{-3}j = 1.102 \cdot 10^{-3} \underline{83.719} \text{ km}^{-1}$$

De acuerdo con (4.1) y las características eléctricas impuestas en el extremo receptor, esto es, $\underline{V}_r = 380/\sqrt{3} \underline{0} = 219.393 \underline{0} \text{ kV}$, $\underline{I}_r = 0.72 - 0.54j \text{ kA}$, se tiene:

$$\underline{V}_e = 247.516 + 26.865j = 248.97 \underline{6.195} \text{ kV} \quad \underline{I}_e = 0.713 - 0.417j = 0.826 \underline{-30.296} \text{ kA}$$

Con ello, la caída de tensión en la línea resulta ser:

$$\underline{V}_e - \underline{V}_r = 29.577 \text{ kV} \implies \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_r}{\underline{V}_r} 100 = 13.48\%$$

y la eficiencia en la transmisión,

$$\eta = \frac{\Re(\underline{S}_r)}{\Re(\underline{S}_e)} 100 = \frac{\Re(\underline{V}_r \underline{I}_r^*)}{\Re(\underline{V}_e \underline{I}_e^*)} 100 = 95.575\%$$

Utilizando por el contrario un modelo de parámetros concentrados para la línea, la impedancia serie y las admitancias paralelo en cada extremo de la línea (modelo en π de la Figura 4.1) valdrían,

$$\underline{z}_s^{\text{con}} = \underline{z}_1 l = 9.8 + 43.928j = 45.061 \underline{77.439} \Omega$$

$$\underline{y}_s^{\text{con}} = \frac{\underline{y}_1}{2} l = 2.639 \cdot 10^{-4}j = 2.639 \cdot 10^{-4} \underline{90} \text{ S}$$

Con este modelo en π de parámetros concentrados, la tensión e intensidad en el extremo emisor de la línea son, utilizando las leyes de Kirchhoff y tomando de nuevo como origen de referencias la tensión en el nudo receptor:

$$\underline{V}_e = \underline{V}_r + \underline{z}_s^{\text{con}}(\underline{I}_r + \underline{V}_r \underline{y}_s^{\text{con}}) = 247.653 + 26.943j = 249.11 \underline{6.209} \text{ kV}$$

$$\underline{I}_e = \underline{I}_r + \underline{V}_r \underline{y}_s^{\text{con}} + \underline{V}_e \underline{y}_s^{\text{con}} = 0.713 - 0.417j = 0.826 \underline{-30.31} \text{ kA}$$

De estas tensiones e intensidades se obtiene una caída de tensión de:

$$\underline{V}_e - \underline{V}_r = 29.721 \text{ kV} \implies \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_r}{\underline{V}_r} 100 = 13.54\%$$

y una eficiencia de valor

$$\eta = \frac{\Re(\underline{S}_r)}{\Re(\underline{S}_e)} 100 = \frac{\Re(\underline{V}_r \underline{I}_r^*)}{\Re(\underline{V}_e \underline{I}_e^*)} 100 = 95.549\%$$

que como se observa coinciden prácticamente con los valores obtenidos cuando se utiliza un modelo exacto para la línea.

Se puede computar también el error cometido en la estimación de las tensiones e intensidades en el nudo 1 cuando se aproxima por el modelo de parámetros concentrados. Así, para la tensión se obtiene:

$$\text{Error}_V = \frac{V_e^{\text{dis}} - V_e^{\text{con}}}{V_e^{\text{dis}}} \cdot 100 = \frac{249.114 - 248.97}{249.114} \cdot 100 = 0.058\%$$

y para la intensidad

$$\text{Error}_I = \frac{I_e^{\text{dis}} - I_e^{\text{con}}}{I_e^{\text{dis}}} \cdot 100 = 6.291 \cdot 10^{-3}\%$$

Se concluye pues que la utilización de un modelo de parámetros concentrados en este caso sería suficientemente preciso y válido.

- 4.3.** Es necesario diseñar el suministro de energía eléctrica a una población cuyo consumo estimado es de 600 MVA con factor de potencia 0.8 inductivo. Para ello se piensa construir una línea de 380 kV y 400 km de longitud, y de parámetros los mostrados en la Tabla 4.4 (se desprecia el valor de la resistencia).

Parámetro	Valor
Inductancia L	1 mH/km
Capacidad C	12 nF/km
Resistencia R	$\cong 0 \Omega/\text{km}$

Tabla 4.4 Datos de la línea del Problema 4.3.

Para mantener un adecuado margen de estabilidad, los ingenieros de planificación determinan que el desfase entre las tensiones de ambos extremos de línea no debe superar los 25 grados. Asimismo, para evitar sobrecalentamientos, las intensidades por los conductores deben ser siempre inferiores a 1 kA.

Determinar si la línea elegida *a priori* cumple ambos requisitos.

Nota: frecuencia $f = 50 \text{ Hz}$.

Resolución

Se utilizará un modelo de parámetros distribuidos, y se tendrá en cuenta que se trata de una línea sin pérdidas ($R \cong 0$).

Las constantes de la línea, impedancia característica y constante de propagación, son:

$$Z_o = \sqrt{\frac{2\pi f L j}{2\pi f C j}} = \sqrt{\frac{0.314 j}{3.77 \cdot 10^{-6} j}} = 288.675 \angle 0 \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{(2\pi f L j)(2\pi f C j)} = 1.088 \cdot 10^{-3} \angle 90 \text{ km}^{-1}$$

Dadas las características de la carga, en un análisis por fase, éstas se traducen en una tensión e intensidad, en el extremo receptor, de valor,

$$V_r = 380/\sqrt{3} \angle 0 \cong 219.393 \angle 0 \text{ kV}$$

$$J_r = \frac{S_r^*}{3 U_r^*} = \frac{600 \cdot 0.8 - 600 \cdot 0.6 j}{3 \cdot 219.393 \angle 0} = 0.729 - 0.547 j = 0.912 \angle -36.87 j \text{ kA}$$

Con el modelo de parámetros distribuidos adoptado para la línea, la tensión e intensidad en el extremo emisor de la misma son:

$$V_e = V_r \cosh(\gamma l) + Z_o J_r \sinh(\gamma l) = 265.515 + 88.778 j = 279.964 \angle 18.488 \text{ kV}$$

$$J_e = J_r \cosh(\gamma l) + \frac{V_r}{Z_o} \sinh(\gamma l) = 0.661 - 0.175 j = 0.684 \angle -14.861 \text{ kA}$$

Con los valores obtenidos se concluye que:

- Se cumple el límite de estabilidad impuesto, dado que el desfase entre las tensiones en uno y otro extremo de la línea, 18.4° , es menor que 25° .
- La restricción de sobrecalentamiento también se respeta al ser los módulos de las intensidades, $I_r = 0.912 \text{ kA}$ e $I_e = 0.684 \text{ kA}$, menores que 1 kA .

Si se hubiese utilizado un modelo de parámetros concentrados para la línea, las tensiones e intensidades resultantes serían:

$$\begin{aligned} V_e &= 282.6 \angle 18.92 \text{ kV} \\ J_e &= 0.684 \angle -15.25 \text{ kA} \end{aligned}$$

que como se observa son muy similares a las obtenidas con el modelo exacto.

Si en este último modelo de parámetros concentrados no se tuviese en cuenta las admitancias a tierra, reduciéndose el modelo de la línea a una reactancia serie (pues la resistencia R se está suponiendo nula desde el principio), se obtendrían los nuevos valores:

$$\begin{aligned} V_e &= 302.35 \angle 17.64 \text{ kV} \\ J_e &= 0.912 \angle -36.87 \text{ kA} \end{aligned}$$

que resultan ser notablemente distintos a los obtenidos con el modelo exacto.

- 4.4.** Desde una subestación a 380 kV parte una línea trifásica de 50 Hz , 380 kV y 140 km . Dimensionar (en MVA) la reactancia que se deberá conectar en el extremo receptor, cuando la línea trabaje en vacío, para evitar que la tensión en dicho punto supere los 380 kV nominales. Los parámetros de la línea son los indicados en la Tabla 4.5.

Parámetro	Valor
Inductancia L	$1.0 \cdot 10^{-3} \text{ H/km}$
Capacidad C	$1.2 \cdot 10^{-8} \text{ F/km}$
Resistencia R	$0.03 \Omega/\text{km}$

Tabla 4.5 Datos de la línea del Problema 4.4.

Resolución

Se resolverá el problema utilizando en primer lugar un modelo de parámetros distribuidos para posteriormente comparar la solución con el de parámetros concentrados.

La impedancia característica y la constante de propagación asociadas a la línea son:

$$\begin{aligned} Z_o &= \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{R + \omega Lj}{\omega Cj}} = 289.003 - 13.768j = 289.333 \angle -2.727 \Omega \\ \gamma &= \sqrt{Z_1 Y_1} = \sqrt{(R + \omega Lj)(\omega Cj)} = \\ &= 5.19 \cdot 10^{-5} + 1.09 \cdot 10^{-3}j = 1.091 \cdot 10^{-3} \angle 87.273 \text{ km}^{-1} \end{aligned}$$

Si la línea permanece en vacío (intensidad nula $J_r = 0$ en el nudo de carga) sin ningún elemento de compensación en la misma, la tensión de fase en el nudo receptor supuesta tensión nominal en el embarrado emisor de la subestación (tensión de fase $V_e = 380/\sqrt{3} \angle 0 = 219.393 \angle 0 \text{ kV}$), es:

$$V_r = V_e \cosh(\gamma l) + Z_o J_r \sinh(\gamma l) \implies V_e = 221.964 \text{ kV}$$

y, por lo tanto, una tensión de línea de 384.453 kV , que se encuentra por encima del valor nominal de 380 kV . Se requiere pues una reactancia inductiva, X , que compense el efecto Ferranti que se produce. Suponiendo tensión nominal en ambos extremos resulta, de la ecuación en tensión de la línea:

$$219.393 \angle 0 = 219.393 \angle 0 \cosh(\gamma l) + Z_o \frac{219.393 \angle 0}{Xj} \sinh(\gamma l)$$

Tomando módulos se obtienen dos soluciones:

$$X = -22.235 \ \Omega$$

y

$$X = 3.782 \cdot 10^3 \ \Omega$$

La primera solución se descarta puesto que corresponde a un condensador.

La potencia reactiva suministrada por la reactancia trifásica de compensación vale:

$$Q_X = \frac{V^2}{X} = \frac{380000^2}{3.782 \cdot 10^3} = 3.818 \cdot 10^7 \implies 38.18 \text{ MVA}$$

Si se utiliza un modelo en π de parámetros concentrados para la línea, resulta una impedancia serie y una admitancia paralelo de valores,

$$z_s^{\text{con}} = Z_1 l = 4.2 + 43.982j = 44.182 \angle 84.545 \ \Omega$$

$$y_s^{\text{con}} = \frac{y_1}{2} l = 2.639 \cdot 10^{-4} j = 2.639 \cdot 10^{-4} \angle 90 \text{ S}$$

La tensión de fase en vacío en el extremo receptor resulta ser ahora:

$$V_r = V_e \frac{\left(\frac{1}{y_s^{\text{con}}} \right)}{z_s^{\text{con}} + \frac{1}{y_s^{\text{con}}}} = 221.969 - 0.249j$$

lo que equivale a una tensión de línea de valor 384.462 kV (prácticamente igual a la que se obtuvo con el modelo exacto).

Compensando de nuevo en el extremo receptor, pero trabajando con el modelo en π de parámetros concentrados, se plantea la ecuación:

$$y_s^{\text{con}} + \frac{1}{Xj} = 0$$

equivalente a la imposición de intensidad nula al final de la línea y, por lo tanto, tensiones iguales en ambos extremos de la misma.

El resultado es $X = 3.789 \cdot 10^3 \ \Omega$, casi coincidente con la solución exacta.

Era de esperar la similitud de resultados utilizando uno u otro modelo puesto que la longitud de la línea es bastante menor que la longitud de onda asociada ($\lambda = \frac{1}{f\sqrt{LC}} = 5774 \text{ km}$).

La Tabla 4.6 resume los resultados obtenidos (tensión de línea en la subestación y reactancia de compensación) utilizando un modelo de parámetros distribuidos y otro de parámetros concentrados cuando se varía la longitud de la línea objeto de estudio.

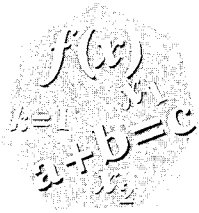
Longitud (km)	Parámetros distribuidos		Parámetros concentrados	
	$V_e^{\text{línea}}$ (kV)	X (Ω)	$V_e^{\text{línea}}$ (kV)	X (Ω)
140	384.453	$3.782 \cdot 10^3$	384.462	$3.789 \cdot 10^3$
200	389.182	$2.642 \cdot 10^3$	389.218	$2.653 \cdot 10^3$
1000	815.771	477.56	922.945	530.51

Tabla 4.6 Análisis comparativo de modelos de línea para diferentes longitudes de línea en el Problema 4.4.

Aunque longitudes tan extremas de líneas como las incluidas pueden ser no realistas, éstas se han considerado para poner de manifiesto cuándo sería notable el error cometido en los cálculos atendiendo a la exactitud del modelo utilizado para la línea eléctrica. Como era de esperar, conforme aumenta la longitud de la línea crece el error. Se considera que para errores superiores al 1% se ha de recurrir a un modelo más exacto.



FLUJO DE CARGAS



Realizar un *flujo de cargas* consiste en obtener las tensiones en todos los nudos y los flujos de potencia por todos los elementos de un sistema de transporte o distribución (líneas, transformadores, reactancias y condensadores). Para ello, se toma como datos de partida el consumo e inyección de potencia en todos los nudos, salvo la potencia reactiva de los nudos regulados en tensión, que se sustituye por el módulo de la tensión regulada.

Aunque existen flujos de cargas específicamente concebidos para redes desequilibradas, en este texto nos limitaremos al caso más común de redes equilibradas, modeladas por tanto mediante su equivalente monofásico en 'por unidad' (p.u.).

Dado que cualquier magnitud de un circuito eléctrico queda definida una vez conocidas las tensiones complejas en todos sus nudos, el primer y más importante paso de un flujo de cargas se dedica precisamente a esta tarea. Esto implica un proceso iterativo, como consecuencia de que las restricciones de potencia impuestas en los nudos conducen a un sistema no lineal de ecuaciones. Si este primer paso tiene éxito, una serie de cálculos rutinarios posteriores permite calcular el resto de magnitudes de interés, como flujos de potencia activa y reactiva, pérdidas, etc.

Las leyes de Kirchhoff, junto a los modelos de cada componente de la red se resumen en las ecuaciones de nudos, que para una red de n nudos se escriben como:

$$J_i = \sum_{j=1}^n y_{ij} u_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

siendo u_i e J_i los fasores de la tensión e intensidad neta inyectada en el nudo i , e y_{ij} el término respectivo de la matriz de admitancias de nudos.

La potencia compleja neta inyectada en cada nudo se obtiene como:

$$S_i = S_{Gi} - S_{Ci} = u_i J_i^* \quad (5.2)$$

siendo S_{Gi} y S_{Ci} , respectivamente, la potencia compleja generada y consumida en dicho nudo.

Entre las dos ecuaciones anteriores pueden eliminarse las intensidades complejas nodales, cuyo valor se desconoce. Utilizando coordenadas cartesianas para los elementos de la matriz de admitancias,

$Y = G + jB$, resulta el siguiente sistema no lineal de n ecuaciones complejas:

$$P_i + jQ_i = U_i \sum_{j=1}^n [G_{ij} - jB_{ij}] U_j^* \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

Utilizando coordenadas polares para las tensiones, $U = V \angle \theta$, el sistema anterior se descompone en las $2n$ ecuaciones reales siguientes:

$$P_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

$$Q_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

donde $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$.

La utilización de coordenadas cartesianas para las tensiones, aunque posible, no ha tenido tanta trascendencia práctica, por lo que se ignorará en este texto.

Como cada nudo aporta 2 ecuaciones y 4 incógnitas al sistema anterior, deben especificarse 2 restricciones por nudo para que dicho sistema pueda resolverse.

En función de los datos especificados se distinguen dos tipos de nudos:

- *Nudos de carga o nudos PQ*: se especifica el consumo de potencia activa y reactiva, siendo nula la potencia generada. Matemáticamente:

$$P_i^{\text{esp}} = -P_{Ci}^{\text{esp}} \quad ; \quad Q_i^{\text{esp}} = -Q_{Ci}^{\text{esp}} \quad (5.6)$$

En estos nudos las incógnitas son V_i y θ_i .

- *Nudos de generación o nudos PV*: nudos donde la tensión se mantiene a un valor especificado y la potencia activa neta se conoce de antemano. Matemáticamente:

$$P_i^{\text{esp}} = P_{Gi}^{\text{esp}} - P_{Ci}^{\text{esp}} \quad ; \quad V_i = V_i^{\text{esp}} \quad (5.7)$$

En estos nudos las incógnitas son Q_i y θ_i .

Como se sabe de la teoría de circuitos, la solución de un sistema en régimen permanente sinusoidal requiere que uno de los ángulos involucrados se tome como origen de fases, lo que reduce el número de incógnitas a $2n - 1$. Por otro lado, como las pérdidas de potencia activa no se conocen *a priori*, una de las potencias activas no se puede especificar de antemano, con lo que el número de ecuaciones también se reduce a $2n - 1$. Por conveniencia de cálculo, se toma como origen de fases el nudo cuya potencia activa no se especifica, denominado *nudo oscilante* o *nudo slack*. Obsérvese asimismo que las incógnitas Q_i en nudos *PV* son funciones explícitas de las tensiones, cuyo módulo es conocido en dichos nudos, por lo que las ecuaciones respectivas pueden ignorarse en el proceso de cálculo y utilizarse cuando se quieran obtener los valores de potencia reactiva. El sistema anterior queda de ese modo reducido a $2n - n_G - 1$ ecuaciones, donde n_G es el número de nudos *PV*, incluyendo el de referencia (esta reducción adicional es una de las ventajas más importantes de la formulación polar frente a la rectangular).

El sistema no lineal de ecuaciones a resolver es por tanto:

$$P_i^{\text{esp}} - V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (5.8)$$

$$Q_i^{\text{esp}} - V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n - n_G \quad (5.9)$$

cuyas incógnitas son los ángulos de fase θ_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$, y los módulos de tensiones V_i , $i = 1, 2, \dots, n - n_G$.

Para la solución iterativa del sistema anterior deben asignarse unos valores iniciales a las tensiones nodales, para lo cual puede servir la solución de un flujo de cargas anterior. Lo más habitual y menos arriesgado, sin embargo, es utilizar lo que se conoce como *perfil plano*, que consiste en hacer $\theta_i^0 = 0$ para todos los nudos y $V_i^0 = 1$ p.u. para los nudos de consumo.

De acuerdo con las tensiones nodales, se pueden obtener posteriormente los flujos de potencia por líneas y transformadores, utilizando su modelo en π visto en capítulos anteriores.

Si se desea, las pérdidas totales del sistema pueden calcularse, una vez hallada la potencia del nudo oscilante, bien mediante la suma de las inyecciones de todos los nudos, o bien como la suma de las pérdidas de cada elemento si sólo se quiere contabilizar una determinada zona.

Este método, poco competitivo en la actualidad pero que aún tiene un cierto interés, utiliza las ecuaciones en forma compleja. Aplica repetitivamente la siguiente fórmula recursiva:

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{y_{ii}} \left[\frac{P_i^{\text{esp}} - jQ_i^{\text{esp}}}{(u_i^k)^*} - \sum_{j=1}^{i-1} y_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n y_{ij} u_j^k \right] \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

y se detiene cuando

$$\max_i |u_i^{k+1} - u_i^k| \leq \varepsilon \tag{5.10}$$

donde ε es un valor suficientemente pequeño.

El método es simple y fácil de programar, pero su convergencia es bastante pobre (el número de iteraciones es del orden de n). Una mejora consiste en utilizar un factor de aceleración α :

$$u_{i\text{acel}}^{k+1} = u_i^k + \alpha (u_i^{k+1} - u_i^k)$$

cuyo valor óptimo está comprendido entre 1.4 y 1.6.

Para nudos *PV* deben hacerse los siguientes ajustes: 1) sustituir Q_i^{esp} por el mejor valor calculado hasta ese momento; 2) el módulo de la tensión resultante se corrige para que tenga el valor deseado:

$$u_{i\text{corr}}^{k+1} = V_i^{\text{esp}} u_i^{k+1} / V_i^{k+1}$$

Este método obtiene nuevos valores mediante linealizaciones sucesivas de las ecuaciones involucradas, expresadas como $f(x) = 0$.

En este caso, las funciones o residuos a anular son la diferencia entre los valores de potencia calculados y los especificados, es decir:

$$\Delta P_i = P_i^{\text{esp}} - V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \tag{5.11}$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{\text{esp}} - V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, n - n_G \tag{5.12}$$

En cada iteración debe resolverse el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}^k \tag{5.13}$$

cuya matriz de coeficientes es el jacobiano, cambiado de signo, del sistema no lineal. Una vez resuelto el sistema, las tensiones se actualizan mediante:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix}^k \quad (5.14)$$

Los términos del jacobiano se obtienen de sus propias definiciones:

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \partial P_i / \partial \theta_j & N_{ij} &= V_j \partial P_i / \partial V_j \\ M_{ij} &= \partial Q_i / \partial \theta_j & L_{ij} &= V_j \partial Q_i / \partial V_j \end{aligned} \quad (5.15)$$

y sus valores se muestran en la Tabla 5.1.

Para	$H_{ii} = -Q_i - B_{ii}V_i^2$	$N_{ii} = P_i + G_{ii}V_i^2$
$i = j$	$M_{ii} = P_i - G_{ii}V_i^2$	$L_{ii} = Q_i - B_{ii}V_i^2$
Para	$H_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$	$N_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$
$i \neq j$	$M_{ij} = -N_{ij}$	$L_{ij} = H_{ij}$

Tabla 5.1 Términos del jacobiano para el método de N-R.

El proceso se detiene cuando todos los componentes del vector de residuos $[\Delta P | \Delta Q]$ son menores que ϵ .

Una variante consiste en trabajar con $\Delta Q / V$ en lugar de ΔQ , para lo cual se divide la fila respectiva por V_i . De ese modo, la ecuación de la potencia reactiva es ligeramente más lineal, lo que a veces ahorra alguna iteración.

Debe aclararse que las particiones que se han realizado en el sistema de ecuaciones pretenden simplemente visualizar mejor la estructura del jacobiano. En la práctica, las dos ecuaciones de cada nudo de carga, y las variables respectivas, se ordenan consecutivamente.

El conocido acoplamiento $P - \theta$ y $Q - V$, y el relativo desacoplo entre ambos subproblemas, se traduce en que los valores numéricos de los bloques N y M del jacobiano son bastante menores que los de las matrices diagonales H y L . Ignorando dichos bloques, e introduciendo unas simplificaciones adicionales, se llega a un modelo de dos sistemas desacoplados con matrices de coeficientes constantes. El llamado método "desacoplado rápido (FDLF)" (*Fast Decoupled Load Flow*) consiste en resolver alternativamente ambos sistemas, y presenta habitualmente una convergencia comparable a la del método de N-R normal, al menos para redes de transporte donde el cociente R/X es bastante reducido.

Los sistemas de ecuaciones involucrados son los siguientes:

$$B' \Delta\theta = \Delta P / V \quad (5.16)$$

$$B'' \Delta V = \Delta Q / V \quad (5.17)$$

donde los elementos de las matrices B' y B'' vienen dados por

$$B'_{ij} = -1/X_{ij}; \quad B'_{ii} = \sum_{j \in i} 1/X_{ij}$$

$$B''_{ij} = -B_{ij}; \quad B''_{ii} = -B_{ii}$$

siendo X_{ij} la reactancia serie del elemento $i-j$, B_{ij} la parte imaginaria del elemento respectivo de la matriz de admitancias de nudos y $j \in i$ el conjunto de nudos j adyacentes a i .

Esas matrices son simétricas (los desfases introducen asimetría en B'') y constantes, por lo que se construyen y factorizan una sola vez. Esto implica una notable reducción del esfuerzo de cálculo, que ha dado mucha popularidad a este método en aplicaciones donde se resuelven repetitivamente flujos de carga.

El subproblema $P - \theta$ resulta ser bastante lineal. De hecho, introduciendo una serie de simplificaciones similares a las del método desacoplado rápido (FDLF), se llega fácilmente a un modelo lineal entre potencias activas y ángulos, en el que las tensiones valen 1 p.u. y se ignoran los flujos de reactiva. Según este modelo, el flujo de potencia activa por una línea entre los nudos i y j vale:

$$P_{ij} = \frac{1}{X_{ij}}(\theta_i - \theta_j); \quad \theta_i - \theta_j = X_{ij}P_{ij} \quad (5.18)$$

donde X_{ij} es la reactancia serie del elemento en cuestión. La ecuación anterior implica que el flujo de cargas en continua ignora las pérdidas Joule, porque el flujo de potencia es idéntico en ambos extremos.

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a los flujos que inciden en cada nudo, se llega al sistema de ecuaciones siguiente:

$$B\theta = P \quad (5.19)$$

donde B coincide con la B' del método desacoplado rápido (FDLF), es decir, se construye como la matriz de admitancias de nudos pero utilizando exclusivamente reactancias. Conviene aclarar que en el sistema anterior el vector P no incluye la potencia del nudo oscilante, ni el vector θ el ángulo de referencia. Dado P , la ecuación anterior permite obtener θ y, como consecuencia, los flujos de potencia por las líneas. La relación entre flujos e inyecciones puede expresarse matemáticamente como:

$$P_f = [X^{-1}A^T B^{-1}] P \quad (5.20)$$

donde A es la matriz de incidencias, excluyendo el nudo de referencia, y X es una matriz diagonal de reactancias. La matriz entre corchetes es llena, pero muchos de sus elementos tienen un valor muy pequeño, lo que refleja la poca influencia que una inyección tiene en flujos eléctricamente remotos.

La solución de un flujo de cargas debe tener en cuenta, en la práctica, una serie de restricciones de contorno adicionales, las más comunes de las cuales se discuten a continuación.

LÍMITES DE REACTIVA EN NUDOS PV

El dispositivo que regula la tensión de un nudo PV tiene una capacidad limitada para absorber o inyectar potencia reactiva. Si se alcanza alguno de los límites, Q^{\min} o Q^{\max} , la tensión regulada no puede mantenerse al valor V^{esp} , con lo que el nudo pasa a ser un nudo de consumo con $Q^{\text{esp}} = Q^{\min}$ o $Q^{\text{esp}} = Q^{\max}$. Este nudo PQ es un tanto especial, pues puede volver a convertirse en nudo PV si, en una iteración k posterior, se cumple que $V^k > V^{\text{esp}}$ cuando $Q^{\text{esp}} = Q^{\max}$, o $V^k < V^{\text{esp}}$ cuando $Q^{\text{esp}} = Q^{\min}$.

En el método de Newton-Raphson en coordenadas polares, convertir un nudo PV a PQ consiste simplemente en incluir ΔQ_i en el vector de residuos y ΔV_i en el vector de estado. Esto implica cambiar la estructura del jacobiano.

En el método desacoplado rápido (FDLF) es preferible no modificar la estructura y valores de las matrices, para no perder su principal ventaja. Por ello, se utiliza un método que corrige V^{esp} en cada iteración para anular en la siguiente el exceso de reactiva sobre el límite violado. Por ejemplo, si se viola el límite superior, los cálculos involucrados son:

$$\begin{aligned} \Delta Q_i &= Q_i^{\max} - Q_i^k \\ \Delta V_i &= \alpha_i \Delta Q_i \\ V_i^{\text{esp}(k+1)} &= V_i^{\text{esp}(k)} + \Delta V_i \end{aligned}$$

Este procedimiento requiere calcular previamente un valor razonable para el coeficiente α_i , que refleja la sensibilidad entre V_i y Q_i . Un valor aproximado se puede obtener resolviendo el sistema:

$$B_a'' S = e_i \quad (5.21)$$

y haciendo $\alpha_i = S_i$, donde e_i es la columna i -ésima de la matriz identidad y B_a'' es la matriz B'' aumentada con la fila y columna correspondiente al nudo i .

TRANSFORMADORES REGULADORES

Estos dispositivos pueden modificar su relación de transformación para mantener constante el módulo de una tensión próxima o regular el flujo de reactiva que los atraviesa. Los transformadores desfasadores, mucho menos habituales, modifican el ángulo de la relación de transformación para regular el flujo de potencia activa, y en el flujo de cargas se tratan análogamente.

En el método de Newton-Raphson se incluye la toma como variable adicional en sustitución de la tensión regulada. El sistema de ecuaciones a resolver tiene la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} H & N & D_p \\ M & L & D_q \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V/V \\ \Delta t/t \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}^k \quad (5.22)$$

donde D_p y D_q tienen tantas columnas como transformadores reguladores haya, y sus elementos se obtienen calculando $t \partial P / \partial t$ y $t \partial Q / \partial t$ a partir del modelo en π del transformador. Si la toma alcanzase alguno de sus límites, el nudo regulado pasaría a PQ y la toma quedaría fija.

Para el método desacoplado rápido (FDLF), con vistas a no modificar las matrices de coeficientes, es preferible corregir el valor de la toma proporcionalmente al error actual de la tensión regulada. Si $\Delta V_i^k = V_i^{\text{esp}} - V_i^k$ es el error de tensión en la iteración k , la toma se corrige para la siguiente en la cantidad:

$$\Delta t^k = \alpha \Delta V_i^k$$

donde, en ausencia de un valor más preciso, suponiendo que la toma está en el lado m , puede tomarse $\alpha = 1$ para $i = m$ y $\alpha = -1$ cuando $i = n$. No se olvide que el valor final de la toma debe redondearse al escalón real más próximo.

INTERCAMBIO ENTRE ÁREAS

Este ajuste se realiza para conseguir que un conjunto dado de líneas transporte una potencia activa total especificada de antemano. Normalmente estas líneas constituyen la interconexión de un área con el resto del sistema. En el método de Newton-Raphson, esta restricción se traduce en una ecuación no lineal adicional, que obliga a que la suma de flujos de potencia activa por las líneas involucradas iguale el valor programado, $P_{\text{tot}}^{\text{esp}}$. Para ello, debe liberarse simultáneamente la potencia activa de uno de los generadores del área, que pasa a ser una variable de control. También es posible que varios generadores actúen como reguladores del intercambio, siempre que se especifique el modo en que dichos generadores se reparten el 'error de área'.

Para el método desacoplado rápido (FDLF) es preferible de nuevo recurrir a la técnica que, sobre la base del error de intercambio en la iteración k , $\Delta P_{\text{tot}}^k = P_{\text{tot}}^{\text{esp}} - P_{\text{tot}}^k$, modifica la potencia total generada en el área en la cantidad:

$$\Delta P_G = \alpha \Delta P_{\text{tot}}^k$$

donde $\alpha = 1$ es un valor razonable.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 5.1. Para la red de tres nudos de la Figura 5.1 y los datos indicados en las Tablas 5.2 y 5.3 (potencia base $S_B = 100$ MVA), resolver el problema del reparto de cargas mediante Newton-Raphson con un error máximo de 0.1 MVA.

En el nudo 1 los límites inferiores y superiores de potencia reactiva son de -10 Mvar y 40 Mvar respectivamente.

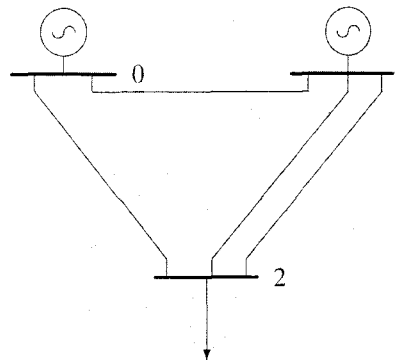


Figura 5.1 Esquema unifilar de la red del Problema 5.1.

Nudos	Tensiones en p.u.	Potencias
0	1.02	-
1	1.02	$P_C = 50$ MW
2	-	$P_C = 100$ MW, $Q_C = 60$ Mvar

Tabla 5.2 Datos de los nudos para la red de la Figura 5.1.

Líneas	Impedancias en p.u.
0-1	$0.02 + 0.04j$
0-2	$0.02 + 0.06j$
1-2	$0.02 + 0.04j$ cada una

Tabla 5.3 Datos de las líneas de la red de la Figura 5.1.

Resolución

La matriz de admitancias de nudos es:

$$Y = \begin{bmatrix} 15 - 35j & -10 + 20j & -5 + 15j \\ -10 + 20j & 30 - 60j & -20 + 40j \\ -5 + 15j & -20 + 40j & 25 - 55j \end{bmatrix}$$

Conocidas las tensiones y potencias que se especifican en el problema, los datos e incógnitas del mismo son:

Nudo	Tipo	Datos		Incógnitas	
0	Slack	$V_0 = 1.02$	$\theta_0 = 0.0$	P_0	Q_0
1	PV	$V_1 = 1.02$	$P_1 = 0.5$	θ_1	Q_1
2	PQ	$P_2 = -1.0$	$Q_2 = -0.6$	θ_2	V_2

Tabla 5.4 Datos e incógnitas del Problema 5.1.

Las ecuaciones de las potencias inyectadas en cada nudo son:

$$P_i^{\text{cal}} = V_i \sum_j V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$$

$$Q_i^{\text{cal}} = V_i \sum_j V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$$

Se han de realizar los balances de potencia activa y/o reactiva en cada nudo (según su carácter):

$$\Delta P = P_i^{\text{esp}} - P_i^{\text{cal}} = 0$$

$$\Delta Q = Q_i^{\text{esp}} - Q_i^{\text{cal}} = 0$$

siendo $P_i^{\text{esp}} = P_{Gi} - P_{Ci}$ y $Q_i^{\text{esp}} = Q_{Gi} - Q_{Ci}$.

Según los datos indicados en la Tabla 5.4, las ecuaciones a resolver en este caso son:

$$0.5 - P_1^{\text{cal}} = 0$$

$$-1 - P_2^{\text{cal}} = 0$$

$$-0.6 - Q_2^{\text{cal}} = 0$$

Para resolver estas ecuaciones se utiliza el algoritmo de Newton-Raphson.

El jacobiano a determinar en cada iteración sería:

$$J = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & N_{12} \\ H_{21} & H_{22} & N_{22} \\ M_{21} & M_{22} & L_{22} \end{bmatrix}$$

Para la primera iteración se parte del perfil de tensiones:

$$V^0 = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 1.02 \\ 1.02 \end{bmatrix} \quad \theta^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con este perfil se obtiene el siguiente vector de residuos de potencias en los nudos:

$$\Delta P = \begin{bmatrix} - \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Delta Q = \begin{bmatrix} - \\ - \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

Como los residuos son mayores que el umbral, fijado en 10^{-3} p.u., se ha de iterar, siendo el jacobiano para esta primera iteración:

$$J = \begin{bmatrix} 62.424 & -41.616 & -20.808 \\ -41.616 & 57.222 & 26.010 \\ 20.808 & -26.010 & 57.222 \end{bmatrix}$$

y el término independiente

$$b = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema $J \Delta x = b$, con $x = [\Delta \theta_1 \quad \Delta \theta_2 \quad \Delta V_2/V_2]^T$, se obtiene el nuevo estado del sistema:

$$V = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 1.02 \\ 1.005 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ -7.953 \cdot 10^{-3} \\ -0.016 \end{bmatrix}$$

Con este nuevo estado se determina el vector de residuos y se comprueban los límites de reactiva en el generador 1.

$$P_i^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.497 \\ 0.496 \\ -0.984 \end{bmatrix} \quad Q_i^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.071 \\ 0.538 \\ -0.587 \end{bmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{bmatrix} - \\ 4.242 \cdot 10^{-3} \\ -0.016 \end{bmatrix} \quad \Delta Q = \begin{bmatrix} - \\ - \\ -0.013 \end{bmatrix}$$

Los residuos superan el límite fijado de 10^{-3} . Por otro lado, como la potencia reactiva máxima que puede producir el generador 1 es de 40 Mvar y la Q_1^{cal} obtenida es de 53 Mvar, es obvio que dicho generador se encuentra fuera de límites. Esto implica que el nudo 1 pase a ser un nudo PQ en la siguiente iteración, fijándose la reactiva generada en el mismo en $Q_1^{\text{esp}} = 0.4$ p.u. Debido a este cambio, el jacobiano a determinar en esta segunda iteración sería el correspondiente al de dos nudos con carácter PQ:

$$J = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & N_{11} & N_{12} \\ H_{21} & H_{22} & N_{21} & N_{22} \\ M_{11} & M_{12} & L_{11} & L_{12} \\ M_{21} & M_{22} & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

Con las tensiones obtenidas tras la primera iteración se obtiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} 61.886 & -41.161 & 31.708 & -20.147 \\ -40.185 & 56.009 & -20.841 & 24.249 \\ -30.716 & 20.147 & 62.962 & -41.161 \\ 20.841 & -26.216 & -40.185 & 54.925 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta V_1/V_1 \\ \Delta V_2/V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.242 \cdot 10^{-3} \\ -0.016 \\ -0.138 \\ -0.013 \end{bmatrix}$$

que una vez resuelto da lugar al siguiente vector de estado,

$$V = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 1.016 \\ 1.001 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ -6.455 \cdot 10^{-3} \\ -0.016 \end{bmatrix}$$

De nuevo se han de calcular los residuos para comprobar si se ha alcanzado la convergencia:

$$P_i^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.51 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad Q_i^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.222 \\ 0.401 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{bmatrix} - \\ 1.034 \cdot 10^{-4} \\ -1.842 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad \Delta Q = \begin{bmatrix} - \\ -6.061 \cdot 10^{-4} \\ -5.482 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Se observa que se ha alcanzado la convergencia tras esta segunda iteración pues el máximo residuo es menor de 10^{-3} . El generador en 1 ha llegado a su límite superior de reactiva no pudiendo mantener su tensión a 1.02 y quedándose en 1.016. El nudo *slack* genera 51 MW y 22.2 Mvar.

- 5.2.** La red de la Figura 5.2, cuyos datos se indican en la Tabla 5.5, se compone de un nudo de generación 0, un nudo de consumo 1 con una carga de 100 MW y 50 Mvar, y un nudo 2 que actúa de interfaz con una red exterior, de la cual importa 50 MW. Las tensiones de los tres nudos se mantienen a 1 p.u. mediante la adecuada inyección de reactiva.

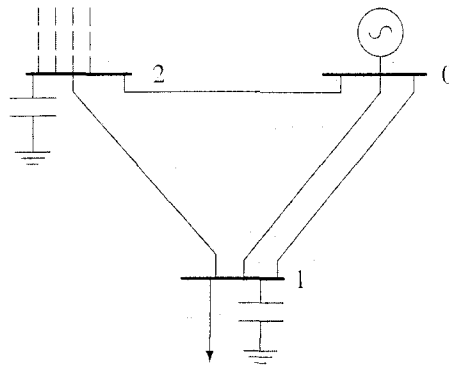


Figura 5.2 Esquema unifilar de la red del Problema 5.2.

Líneas	Impedancias z (p.u.)	$y/2$ (p.u.)
0-2	$0.1j$	—
LA:0-1	$0.1j$	$0.01j$
LB:0-1	$0.1j$	$0.01j$
1-2	$0.1j$	—

Tabla 5.5 Datos de las líneas de la red de la Figura 5.2.

Determinar el estado de la red, tensiones y potencias generadas en cada nudo, mediante el algoritmo de Newton-Raphson, con un error máximo de 0.1 MW en las potencias. Tomar como potencia base 100 MVA.

Resolución

La matriz de admitancias de nudos es:

$$Y = \begin{bmatrix} -29.98j & 20j & 10j \\ 20j & -29.98j & 10j \\ 10j & 10j & -20j \end{bmatrix}$$

De acuerdo al enunciado, los datos e incógnitas del problema son los siguientes:

Nudo	Tipo	Datos		Incógnitas	
0	Slack	$V_0 = 1.0$	$\theta_0 = 0.0$	P_0	Q_0
1	PV	$V_1 = 1.0$	$P_1 = -1$	θ_1	Q_1
2	PV	$V_2 = 1.0$	$P_2 = 0.5$	θ_2	Q_2

Tabla 5.6 Datos e incógnitas del Problema 5.2.

Partiendo de un perfil plano en las tensiones, $V = [1 \ 1 \ 1]^T$ y $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$, los residuos de potencias activas en cada nudo son:

$$\Delta P = P^{esp} - P^{cal} = \begin{bmatrix} - \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Al tratarse de una red en la que todos los nudos son PV y sin límite de reactiva en los mismos, el algoritmo de Newton-Raphson se reduce a la resolución del problema de activa. En la primera iteración el sistema a determinar sería:

$$\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

que una vez resuelto da lugar al siguiente vector de estado

$$V = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

Se han de obtener ahora los residuos en los nudos para ver si se ha alcanzado la convergencia.

$$P_i^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta P = P^{\text{esp}} - P^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} - \\ 1.967 \cdot 10^{-4} \\ 1.083 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Los residuos son menores que el error máximo permitido, $0.1 \text{ MW} = 0.001 \text{ p.u.}$, por lo que el método converge en una iteración.

Las tensiones en los nudos son de valor $u_0 = 1 \angle 0$, $u_1 = 1 \angle -1.72$ y $u_2 = 1 \angle 0.57$.

En cuanto a las potencias generadas en cada nudo, se calculan, además de las potencias activas inyectadas en cada nudo y anteriormente obtenidas, las potencias reactivas:

$$Q_i^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} -0.011 \\ -3.002 \cdot 10^{-3} \\ 8.499 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

El nudo 0 genera una potencia activa de 50 MW y consume una reactiva de 1.1 Mvar.

En el nudo 1 tiene lugar un consumo neto de reactiva de 0.3 Mvar. Puesto que en este nudo existe una carga que absorbe 50 Mvar, se están generando en el mismo un total de 49.7 Mvar, producidos por la batería de condensadores conectada a dicho nudo.

En el nudo 2 se tiene una inyección de reactiva de 0.85 Mvar que proceden de la red exterior y batería de condensadores que inciden en el mismo.

- 5.3.** Resolver, mediante el método de Newton-Raphson, el reparto de cargas para la red de la Figura 5.3 y los datos mostrados en las Tablas 5.7 y 5.8 (potencia base $S_B = 100 \text{ MVA}$), sabiendo que el transformador con tomas variables controla la tensión del nudo 3 a 1.02 p.u. Las tomas del transformador se encuentran divididas en 21 escalones dentro del rango $0.9 < t < 1.1$.
 Limitar el error del algoritmo de resolución a 1 MVA.

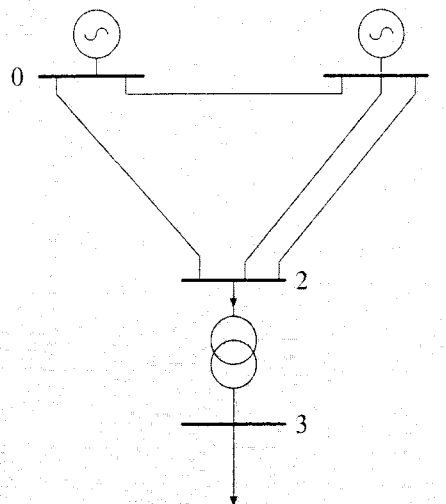


Figura 5.3 Esquema unifilar de la red del Problema 5.3.

Nodos	Tensiones en p.u.	Potencias
0	1.02	-
1	1.02	$P_G = 50 \text{ MW}, -10 < Q_G < 40 \text{ Mvar}$
2	-	$P_C = 0 \text{ MW}, Q_C = 0 \text{ Mvar}$
3	-	$P_C = 100 \text{ MW}, Q_C = 60 \text{ Mvar}$

Tabla 5.7 Datos de los nudos para la red de la Figura 5.3.

Ramas	Impedancias en p.u.
0-1	$0.02 + 0.04j$
0-2	$0.02 + 0.06j$
1-2	$0.02 + 0.04j$ cada una
2-3	$0.1j$

Tabla 5.8 Datos de las ramas de la red de la Figura 5.3.

Resolución

La matriz de admitancias de nudos para este problema incluye las tomas del transformador cuando en éste se adopta el modelo en π tal como se indica en la Figura 5.4.

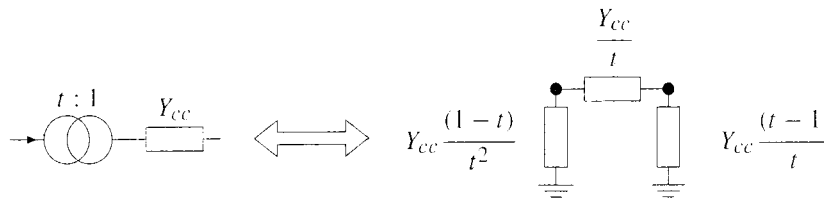


Figura 5.4 Esquema en π de un transformador con tomas.

$$Y = \begin{bmatrix} 15 - 35j & -10 + 20j & -5 + 15j & 0 \\ -10 + 20j & 30 - 60j & -20 + 40j & 0 \\ -5 + 15j & -20 + 40j & 25 - 55j - \frac{10}{t^2}j & \frac{10}{t}j \\ 0 & 0 & \frac{10}{t}j & -10j \end{bmatrix}$$

Para un valor inicial de la toma de 1 resulta:

$$Y = \begin{bmatrix} 15 - 35j & -10 + 20j & -5 + 15j & 0 \\ -10 + 20j & 30 - 60j & -20 + 40j & 0 \\ -5 + 15j & -20 + 40j & 25 - 65j & 10j \\ 0 & 0 & 10j & -10j \end{bmatrix}$$

De acuerdo con los datos sobre tensiones y potencias en cada nudo se puede elaborar la Tabla 5.9 que define el carácter de cada nudo, PQ o PV.

Nudo	Tipo	Datos	Incógnitas
0	Slack	$V_0 = 1.02$ $\theta_0 = 0.0$	P_0 Q_0
1	PV	$V_1 = 1.02$ $P_1 = 0.5$	θ_1 Q_1
2	PQ	$P_2 = 0.0$ $Q_2 = 0.0$	θ_2 V_2
3	PV	$V_3 = 1.02$ $P_3 = -1, Q_3 = -0.6$	θ_3 t

Tabla 5.9 Datos e incógnitas del Problema 5.3.

Las ecuaciones a resolver en este caso son:

$$\left. \begin{array}{l} P_1^{\text{esp}} - P_1^{\text{cal}} = 0 \\ P_2^{\text{esp}} - P_2^{\text{cal}} = 0 \\ Q_2^{\text{esp}} - Q_2^{\text{cal}} = 0 \\ P_3^{\text{esp}} - P_3^{\text{cal}} = 0 \\ Q_3^{\text{esp}} - Q_3^{\text{cal}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.5 - P_1^{\text{cal}} = 0 \\ P_2^{\text{cal}} = 0 \\ Q_2^{\text{cal}} = 0 \\ -1 - P_3^{\text{cal}} = 0 \\ -0.6 - Q_3^{\text{cal}} = 0 \end{array} \right\}$$

Para resolver el problema se aplica el algoritmo de Newton-Raphson modificado para poder incluir así como variable la toma del transformador.

Para este problema, el sistema resultante sería:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & N_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & N_{22} & C_2 \\ 0 & H_{32} & H_{33} & N_{32} & C_3 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & L_{22} & D_2 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & L_{32} & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta V_2/V_2 \\ \Delta t/t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix}$$

que partiendo del siguiente perfil en las tensiones

$$V = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 1.02 \\ 1.02 \\ 1.02 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

toma para la primera iteración los siguientes valores

$$\begin{bmatrix} 64.424 & -41.616 & 0 & -20.808 & 0 \\ -41.616 & 67.626 & -10.404 & 26.010 & 0 \\ 0 & -10.404 & 10.404 & 0 & 0 \\ 20.808 & -26.010 & 0 & 67.626 & -10.404 \\ 0 & 0 & 0 & -10.404 & 10.404 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta V_2/V_2 \\ \Delta t/t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se obtiene el nuevo vector de estado y la nueva toma del transformador:

$$V = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 1.02 \\ 1.005 \\ 1.02 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ -7.593 \cdot 10^{-3} \\ -0.016 \\ -0.113 \end{bmatrix} \quad t = 0.927$$

Se comprueba que la toma del transformador no supera límites.

Con estos nuevos valores se actualiza la matriz de admitancias de nudos y se obtienen las potencias "calculadas" en cada nudo:

$$P^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.497 \\ 0.496 \\ 0.077 \\ -1.061 \end{bmatrix} \quad Q^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.071 \\ 0.538 \\ 0.151 \\ -0.596 \end{bmatrix}$$

Como la máxima potencia reactiva que puede generarse en el nudo 1 es de 40 Mvar y la Q^{cal} en el mismo es de 53.8 Mvar, el generador se encuentra fuera de límites. Esto obliga a fijar la reactiva generada en el nudo en 0.4 p.u. y, por lo tanto, a cambiar el carácter del nudo que pasa a ser PQ. Debido a esto, el nuevo sistema a plantear en esta segunda iteración sería:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & N_{11} & N_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & N_{21} & N_{22} & C_2 \\ 0 & H_{32} & H_{33} & N_{31} & N_{32} & C_3 \\ M_{11} & M_{12} & 0 & L_{11} & L_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & L_{21} & L_{22} & D_2 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & 0 & L_{32} & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta V_1/V_1 \\ \Delta V_2/V_2 \\ \Delta t/t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix}$$

que conduce a los valores numéricos

$$\begin{bmatrix} 61.886 & -41.161 & 0 & 31.708 & -20.147 & 0 \\ -40.815 & 67.099 & -11 & -20.841 & 25.310 & -1.061 \\ 0 & -11 & 11 & 0 & -1.061 & 1.061 \\ -30.716 & 20.147 & 0 & 62.962 & -41.161 & 0 \\ 20.841 & -25.156 & -1.061 & -40.815 & 67.401 & -12.477 \\ 0 & 1.061 & -1.061 & 0 & -11 & 11 \end{bmatrix} \Delta x = \begin{bmatrix} 4.242 \cdot 10^{-3} \\ -0.077 \\ 0.061 \\ -0.138 \\ -0.151 \\ -3.95 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Tras resolver esta segunda iteración se obtiene la nueva toma del transformador y las tensiones complejas en todos los nudos salvo en el de referencia:

$$V = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 1.013 \\ 0.997 \\ 1.02 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ -5.429 \cdot 10^{-3} \\ -0.014 \\ -0.105 \end{bmatrix} \quad t = 0.921$$

Las nuevas potencias calculadas en los nudos y, con ellas, los nuevos residuos, son:

$$P^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.511 \\ 0.5 \\ 2.41 \cdot 10^{-4} \\ -1 \end{bmatrix} \quad Q^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.354 \\ 0.538 \\ 1.228 \cdot 10^{-3} \\ -0.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta P = \begin{bmatrix} - \\ 8.427 \cdot 10^{-5} \\ -2.41 \cdot 10^{-4} \\ -6.613 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad \Delta Q = \begin{bmatrix} - \\ -9.659 \cdot 10^{-4} \\ -1.228 \cdot 10^{-3} \\ -1.8 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Se alcanza la convergencia con un error menor del admitido, 10^{-2} p.u., y sin superar límites en la toma del transformador.

La toma del transformador, 0.921, se ha de ajustar al valor discreto más próximo, en este caso 0.92. Con este nuevo valor de la toma y las tensiones anteriormente obtenidas se determinan los nuevos residuos de potencia en los nudos para comprobar límites (previa actualización de la matriz de admitancias de nudos):

$$\Delta P = \begin{bmatrix} - \\ 8.427 \cdot 10^{-5} \\ -1.016 \cdot 10^{-3} \\ 7.686 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad \Delta Q = \begin{bmatrix} - \\ -9.659 \cdot 10^{-4} \\ -0.011 \\ 8.351 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

En el nudo 2 el residuo de reactiva supera el límite de error, -0.01 p.u., con lo que es necesario volver a iterar fijando la toma del transformador a 0.92 p.u., y liberando la tensión del nudo 3 que pasa a ser un nudo PQ. El nuevo sistema a resolver es el correspondiente a tres nudos PQ (recuérdese que en el nudo 1 se superó el límite de reactiva modificando su carácter inicial de PV):

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & N_{31} & N_{32} & N_{33} \\ M_{11} & M_{12} & M_{13} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta V_1/V_1 \\ \Delta V_2/V_2 \\ \Delta V_3/V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix}$$

que obtiene los valores numéricos

$$\begin{bmatrix} 61.223 & -40.605 & 0 & 31.312 & -19.863 & 0 \\ -40.253 & 66.452 & -11.012 & -20.566 & 24.869 & 1.001 \\ 0 & -11.012 & 11.012 & 0 & -1.001 & -1.001 \\ -30.312 & 19.863 & 0 & 62.025 & -40.605 & 0 \\ 20.566 & -24.867 & -1.001 & -40.253 & 66.474 & -11.012 \\ 0 & 1.001 & -1.001 & 0 & -11.012 & 9.796 \end{bmatrix} \Delta x = \begin{bmatrix} 8.427 \cdot 10^{-5} \\ -1.016 \cdot 10^{-3} \\ 7.686 \cdot 10^{-4} \\ -9.659 \cdot 10^{-4} \\ -0.011 \\ 8.351 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Tras resolver este sistema y actualizar las tensiones complejas en todos los nudos salvo el de referencia, el estado de la red resulta:

$$V = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 1.013 \\ 0.997 \\ 1.021 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ -5.411 \cdot 10^{-3} \\ -0.014 \\ -0.105 \end{bmatrix}$$

Si se calculan ahora las potencias inyectadas en los nudos y los residuos correspondientes se obtiene:

$$P^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.511 \\ 0.5 \\ -1.149 \cdot 10^{-6} \\ -1 \end{bmatrix} \quad Q^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.356 \\ 0.4 \\ 6.44 \cdot 10^{-7} \\ -0.6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta P = \begin{bmatrix} - \\ 1.007 \cdot 10^{-8} \\ 1.149 \cdot 10^{-6} \\ -1.173 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \Delta Q = \begin{bmatrix} - \\ -5.472 \cdot 10^{-8} \\ -6.44 \cdot 10^{-7} \\ -7.175 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

alcanzándose por tanto la convergencia del método.

El *slack* genera 51.1 MW y 35.6 Mvar, mientras que el generador 1 ha llegado al límite de reactiva no siendo capaz de mantener la tensión del nudo al que se encuentra conectado en 1.02 p.u., y quedando en 1.013 p.u.

5.4. De la red de la Figura 5.5 se conocen los datos (todos ellos bajo una misma base) indicados en las Tablas 5.10 y 5.11.

El transformador situado entre los embarrados 1 y 2 posee tomas variables en el lado de baja (nudo 2) y mantiene la tensión del nudo 1 a 1.00, según se indica en la Tabla 5.10.

1. Plantear numéricamente las ecuaciones necesarias para resolver el reparto de cargas por el método de Newton-Raphson (matriz de admitancias, vector de residuos y jacobiano en la primera iteración).
2. Suponiendo que $t = 0.98$, $U_1 = 1.0092 \angle -0.204$ y $U_2 = 0.989 \angle -0.295$, determinar los flujos de potencia por la línea y el transformador, así como las potencias activa y reactiva suministradas por los dos generadores.

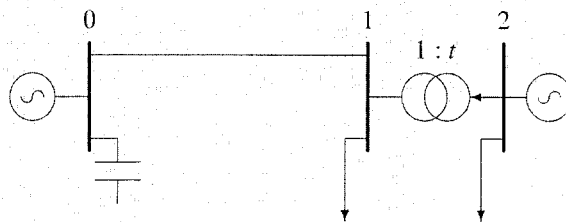


Figura 5.5 Esquema unifilar de la red del Problema 5.4.

Nudos	Tensiones	Potencias
0	1.01	-
1	1.0	$S_C = 3 + 2j$
2	1.0	$S_C = 2 + j, P_G = 0.4, -1 < Q_G < 1$

Tabla 5.10 Datos de los nudos para la red de la Figura 5.5.

Elementos	Modelo
Línea 0-1	$Z = 0.08j, Y_{shunt}/2 = 0.01j$
Transformador 1-2	$Z_{cc} = 0.1j$
Condensador en 0	$Y = 0.15j$

Tabla 5.11 Datos de los elementos de la red de la Figura 5.5.

Resolución

1. Utilizando para el transformador el mismo modelo en π que se utilizó para el Problema 5.3, detallado en la Figura 5.4, y un valor inicial de la toma de 1, la matriz de admitancias de nudos para este problema resulta ser:

$$Y = \begin{bmatrix} -12.34j & 12.5j & 0 \\ 12.5j & -22.49j & 10j \\ 0 & 10j & -10j \end{bmatrix}$$

En este caso, el carácter de cada nudo, función de las tensiones y potencias fijadas y conocidas en cada uno de ellos, define la siguiente Tabla 5.12 de datos e incógnitas:

Nudo	Tipo	Datos	Incógnitas
0	Stack	$V_0 = 1.02$	P_0, Q_0
1	PV	$V_1 = 1.00, P_1^{esp} = -3, Q_1^{esp} = -2$	θ_1, t
2	PQ	$V_2 = 1.00, P_2^{esp} = -1.6$	θ_2, Q_2

Tabla 5.12 Datos e incógnitas del Problema 5.4.

Las ecuaciones que hay que resolver son por tanto:

$$\begin{aligned} -3 - P_1^{cal} &= 0 \\ -1.6 - P_2^{cal} &= 0 \\ -2 - Q_1^{cal} &= 0 \end{aligned}$$

que, tras aplicar el algoritmo de Newton-Raphson dan lugar al sistema

$$\begin{bmatrix} H_{11} & C_1 & H_{12} \\ M_{11} & D_2 & M_{12} \\ H_{21} & C_2 & H_{22} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta t/t \\ \Delta\theta_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix}^k$$

Partiendo del perfil de tensiones $V = [1.01 \ 1 \ 1]^T$, $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ se obtienen, para el sistema anterior, los siguientes valores numéricos para la primera iteración:

$$\begin{bmatrix} 22.625 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta t/t \\ \Delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1.865 \\ -1.6 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema se obtendrían los nuevos valores para θ_1 , θ_2 y t . Se actualizaría la matriz de admitancias de nudos con el nuevo valor de la toma y se procedería a obtener las nuevas potencias inyectadas en los mismos. El objetivo es comprobar los límites de reactiva y de la toma del transformador, así como los residuos de potencia.

2. Partiendo de los datos fijados en este apartado del problema, a saber,

$$V = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1.0092 \\ 0.9890 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.00356 \\ -0.00515 \end{bmatrix} \quad t = 0.98$$

la matriz de admitancias de nudos resultante es:

$$Y = \begin{bmatrix} -12.34j & 12.5j & 0 \\ 12.5j & -22.49j & 10.240j \\ 0 & 10.240j & -10.412j \end{bmatrix}$$

siendo posible determinar con ella y con las tensiones cualquier magnitud de interés. Así, las potencias activas y reactivas suministradas por los generadores requieren determinar las potencias calculadas en cada nudo:

$$P_0^{\text{cal}} = V_0 V_1 (G_{11} \cos \theta_{01} + B_{11} \sin \theta_{01}) = 0.045$$

$$Q_0^{\text{cal}} = V_0 V_1 (G_{11} \sin \theta_{01} - B_{11} \cos \theta_{01}) = -0.153$$

El nudo de referencia genera una potencia activa de 0.045 p.u. y consume 0.153 p.u. de potencia reactiva.

En el nudo 2 se obtiene:

$$Q_2^{\text{cal}} = V_2 V_1 (G_{11} \sin \theta_{21} - B_{11} \cos \theta_{21}) = -1.594 \cdot 10^{-4}$$

Como en este nudo existe una carga que consume una potencia reactiva de 1 p.u., la que suministra el generador será de $1 - 1.594 \cdot 10^{-4} = 0.99$ p.u.

Para determinar los flujos de potencia por las líneas se aplica la siguiente expresión:

$$S_{ij} = U_i J_{ij}^* = U_i \left[(U_i - U_j)^* y_{ij}^* + U_i^* \frac{(y_{ij}^{\text{shunt}})^*}{2} \right]$$

Separando por un lado la parte real y por otro la imaginaria se obtienen los flujos por las líneas. Para el caso de la línea que une el nudo 0 con el 1, como no posee resistencia, los flujos de activa en uno y otro extremo son coincidentes:

$$P_{01} = -P_{10} = V_0 V_1 \frac{\sin \theta_{01}}{X_{01}} = 0.045$$

En cuanto a la reactiva resulta:

$$Q_{01} = V_0^2 \left(\frac{1}{X_{01}} - \frac{B_{01}^{\text{shunt}}}{2} \right) - V_0 V_1 \frac{\cos \theta_{01}}{X_{01}} = -2.026 \cdot 10^{-5}$$

$$Q_{10} = V_1^2 \left(\frac{1}{X_{01}} - \frac{B_{01}^{\text{shunt}}}{2} \right) - V_1 V_0 \frac{\cos \theta_{10}}{X_{01}} = -0.02$$

Se deduce entonces que la línea produce una potencia reactiva de valor $|Q_{01} + Q_{10}| = 0.02002$ p.u.

Análogamente se obtienen las potencias en uno y otro extremo del transformador. En este caso resulta más fácil determinar la potencia reactiva al no existir admitancias a tierra, si bien no se ha de olvidar la toma del transformador:

$$P_{12} = -P_{21} = V_1 V_2 \frac{\sin \theta_{12}}{X_{cc}} = 0.016$$

$$Q_{12} = V_1^2 \frac{1}{X_{cc}} - V_1 V_2 \frac{\cos \theta_{12}}{t X_{cc}} = 1.776 \cdot 10^{-4}$$

$$Q_{21} = V_2^2 \frac{1}{t^2 X_{cc}} - V_2 V_1 \frac{\cos \theta_{21}}{t X_{cc}} = -1.519 \cdot 10^{-4}$$

En el transformador se producen unas pérdidas de potencia reactiva de valor $Q_{12} + Q_{21} = 0.257 \cdot 10^{-4}$ p.u.

5.5. Para la red de tres nudos de la Figura 5.6 y los datos indicados en las Tablas 5.13 y 5.14 (potencia base $S_B = 100$ MVA), se desea tener una tensión de 1.0 p.u. en el nudo 1, sabiendo que la tensión en los otros nudos se mantiene a 1.04 p.u. Determinar:

1. Tensiones en módulo y fase en los tres nudos utilizando el método desacoplado rápido (FDLF), para un error máximo de 2 MW o Mvar en las potencias.
2. Reactiva que suministra la batería de condensadores del nudo 1.

3. El rendimiento de la red.

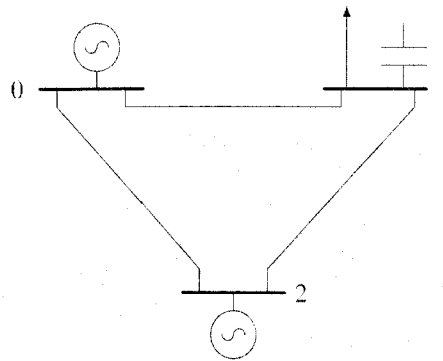


Figura 5.6 Esquema unifilar de la red del Problema 5.5.

Nodos	Potencias (p.u.)
0	-
1	$S_C = 1.0 + 0.8j$
2	$P_G = 0.6$

Tabla 5.13 Datos de los nudos para la red de la Figura 5.6.

Líneas	Impedancias en p.u.	$y_{shunt}/2$ en p.u.
0-1	$0.01 + 0.1j$	0
0-2	$0.25j$	$0.05j$
1-2	$0.5j$	$0.05j$

Tabla 5.14 Datos de las líneas de la red de la Figura 5.6.

Resolución

1. La matriz de admitancias de nudos es:

$$Y = \begin{bmatrix} 0.99 - 13.851j & -0.99 + 9.901j & 4j \\ -0.99 + 9.901j & 0.99 - 11.851j & 2j \\ 4j & 2j & -5.9j \end{bmatrix}$$

De acuerdo al enunciado todos los nudos resultan ser PV, obteniéndose la Tabla 5.15 que resume los datos e incógnitas del problema.

Nudo	Tipo	Datos	Incógnitas
0	Slack	$V_0 = 1.04$ $\theta_0 = 0.0$	P_0 Q_0
1	PV	$V_1 = 1.00$ $P_1 = -1$	θ_1 Q_1
2	PV	$V_2 = 1.04$ $P_2 = 0.6$	θ_2 Q_2

Tabla 5.15 Datos e incógnitas del Problema 5.5.

Las ecuaciones a resolver son por tanto:

$$\begin{aligned} -1 - P_1^{cal} &= 0 \\ 0.6 - P_2^{cal} &= 0 \end{aligned}$$

En el problema propuesto, al estar fijadas las tensiones, las únicas incógnitas son los ángulos. Por tanto, la subiteración de reactiva del método desacoplado rápido (FDLF) no se tendrá en cuenta. La matriz B' del subproblema de activa resulta ser:

$$B' = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Tras calcular el vector de residuos de potencias activas de la misma forma en la que se venían calculando en los problemas anteriores, el problema activo en su primera iteración queda como:

$$\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta P_1}{V_1} \\ \frac{\Delta P_2}{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1 - 0.041)}{1.00} \\ \frac{(0.6 + 0.04)}{1.04} \end{bmatrix}$$

cuya solución actualiza el vector de ángulos

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.068 \\ 0.074 \end{bmatrix}$$

Procede ahora calcular los residuos de potencia activa en los nudos 1 y 2 y comprobar si se ha alcanzado o no la convergencia.

$$\Delta P = P^{\text{esp}} - P^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} - \\ -1 + 1.028 \\ 0.6 - 0.611 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ 0.028 \\ -0.011 \end{bmatrix}$$

El nudo 1 supera el máximo error permitido (2 MW), por lo que se requiere una segunda iteración para reducir el error. El nuevo sistema a resolver sólo modifica, con respecto a la primera iteración el vector independiente:

$$\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(0.028)}{1.00} \\ \frac{(-0.011)}{1.04} \end{bmatrix} \Rightarrow \theta^2 = \Delta\theta + \theta^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.066 \\ 0.073 \end{bmatrix}$$

Tras esta segunda iteración se comprueban de nuevo los residuos:

$$\Delta P = \begin{bmatrix} - \\ -6.254 \cdot 10^{-4} \\ 9.854 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

que ahora resultan ser menores que la tolerancia.

2. Para determinar la reactiva que cede la batería de condensadores en el nudo 1 se parte de la potencia reactiva inyectada en dicho nudo (Q_1^{cal}):

$$Q_1^{\text{cal}} = -0.416$$

lo que significa, al ser negativa, que en el nudo llega a través de la red una reactiva de 41.6 Mvar. Como en el nudo existe una carga que consume 80.0 Mvar, significa que la batería de condensadores suministra una reactiva de 38.4 Mvar.

3. El rendimiento del sistema es una medida de las pérdidas que se están produciendo en la red, definiéndose como:

$$\eta = \frac{P_{\text{consumida}}}{P_{\text{generada}}}$$

La potencia activa total consumida corresponde únicamente a la carga existente en el nudo 1, siendo de 100 MW. En cuanto a la potencia generada, además de los 60 MW producidos en 2, habría que obtener la activa inyectada en 0:

$$P_0^{\text{cal}} = 0.405$$

Por lo tanto, el rendimiento de la red resulta ser de:

$$\eta = \frac{100}{40.5 + 60} 100 = 99.454\%$$

Cabe resaltar que el rendimiento obtenido es bastante elevado debido a la idealización en el modelado de las líneas de la red, donde se ha despreciado la resistencia de las mismas salvo para una de ellas.

5.6. La red de la Figura 5.7 se compone de dos plantas de generación que alimentan un centro de consumo. De los generadores y de las líneas de transporte se conocen los datos proporcionados por los fabricantes, Tablas 5.16 y 5.17.

Ambos generadores están conectados a la red de transporte de 200 kV a través de transformadores de 15/200 kV.

En un instante determinado, los consumos y generaciones son los siguientes:

- En el nudo 0 existe una carga que consume 200 MW.
- La carga del nudo 1 consume 250 MW y 80 Mvar, inyectando la batería de condensadores conectada a dicho nudo 200 Mvar para ayudar al mantenimiento de su tensión.
- El generador conectado al nudo 2 proporciona a la red 200 MW.

Además, las tensiones de los los generadores 0 y 2 se mantienen a 15 kV y 16.5 kV respectivamente, considerando cada generador y su centro de transformación como un grupo único. Para dicho estado de la red se pide:

1. Trabajando en p.u., con potencia base de 100 MVA y una tensión base en la red de 200 kV, determinar el estado de la red (tensiones en módulo y fase) con un error en las potencias menor a 10 MW y 10 Mvar, utilizando el método desacoplado rápido (FDLF).
2. Calcular las intensidades que suministran los generadores a la salida de los transformadores elevadores de tensión.
3. Comparar las tensiones que se obtendrían si el condensador del nudo 1 se modela como una admitancia, la correspondiente a 200 Mvar cuando la tensión en el mismo es de 1 p.u.

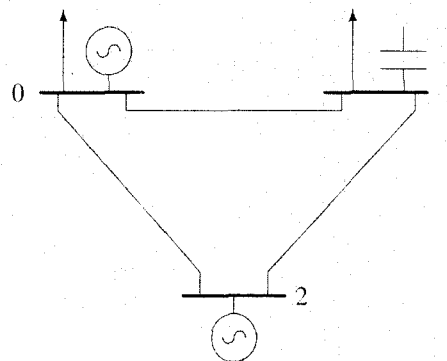


Figura 5.7 Esquema unifilar de la red del Problema 5.6.

Planta	S_{NOM} (MVA)	V_N (kV)
G0	300	15
G2	250	15

Tabla 5.16 Datos de los generadores de la red de la Figura 5.7.

Línea	Y_{serie} (mS/fase)
0-1	25.0
0-2	37.5
2-1	30.0

Tabla 5.17 Datos de las líneas de la red de la Figura 5.7.

Resolución

1. De acuerdo a la base fijada, $S_B = 100$ MVA y $V_B = 200$ kV, la admitancia base en las líneas es:

$$Y_B = \frac{S_B}{V_B^2} = 400 \text{ S}$$

Con esta admitancia se calculan las de línea en p.u.:

$$y_{01} = -10j \quad y_{02} = -15j \quad y_{12} = -12j$$

y a partir de éstas, la matriz de admitancias de nudos

$$Y = \begin{bmatrix} -25j & 10j & 15j \\ 10j & -22j & 12j \\ 15j & 12j & -27j \end{bmatrix}$$

Las tensiones base en los generadores coinciden con la del lado de baja de los transformadores, 15 kV, al haber optado por una tensión base en el lado de alta coincidente con la tensión nominal de los transformadores en dicho nivel de tensión. Así, las tensiones en p.u. en los nudos 0 y 2 son:

$$V_0 = \frac{15}{15} = 1 \quad V_2 = \frac{16.5}{15} = 1.1$$

Finalmente sólo restaría determinar los consumos y generaciones en p.u.:

$$P_0^C = \frac{200}{100} = 2$$

$$S_1^C = \frac{250 + 80j}{100} = 2.5 + 0.8j$$

$$Q_1^G = \frac{200}{100} = 2$$

$$P_2^G = \frac{200}{100} = 2$$

La Tabla 5.18 define el carácter de cada nudo, PQ o PV, en función de los datos e incógnitas.

Nudo	Tipo	Datos		Incógnitas	
0	Slack	$V_0 = 1.02$	$\theta_0 = 0.0$	P_0	Q_0
1	PQ	$P_1 = -2.5$	$Q_1 = 1.2$	θ_1	V_1
2	PV	$V_2 = 1.10$	$P_2 = 2.0$	θ_2	Q_2

Tabla 5.18 Datos e incógnitas del Problema 5.6.

Las ecuaciones a resolver son por tanto las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} P_1^{esp} - P_1^{cal} = 0 \\ Q_1^{esp} - Q_1^{cal} = 0 \\ P_2^{esp} - P_2^{cal} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2.5 - P_1^{cal} = 0 \\ 1.2 - Q_1^{cal} = 0 \\ 2.0 - P_2^{cal} = 0 \end{array} \right\}$$

Partiendo de un perfil de tensiones

$$V = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.1 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el problema de activa para la primera iteración del método desacoplado rápido (FDLF) resulta ser:

$$B' \Delta\theta = \frac{\Delta P}{V} \Rightarrow \begin{bmatrix} 22 & -12 \\ -12 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2.5 - 0}{1.0} \\ \frac{2 - 0}{1.0} \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto se obtiene el nuevo vector de ángulos:

$$\theta^1 = \Delta\theta + \theta^0 = \begin{bmatrix} \theta_1^1 \\ \theta_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.102 \\ 0.022 \end{bmatrix}$$

Con estos ángulos se obtienen los residuos de potencia reactiva para resolver el subproblema de reactiva:

$$B'' \Delta V = \frac{\Delta Q}{V} \Rightarrow [22] [\Delta V_1] = \left[\frac{1.2 + 1.048}{1.0} \right]$$

que permite actualizar el módulo de las tensiones en el único nudo PQ

$$V^1 = \Delta V + V^0 = [V_1^1] = [1.102]$$

Después de la primera iteración completa del reparto de cargas desacoplado rápido, las tensiones nodales son:

$$V^1 = \begin{bmatrix} V_0^1 \\ V_1^1 \\ V_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.102 \\ 1.1 \end{bmatrix} \quad \theta^1 = \begin{bmatrix} \theta_0^1 \\ \theta_1^1 \\ \theta_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.102 \\ 0.022 \end{bmatrix}$$

Tras esta primera iteración completa se determinan los residuos de activa:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.413 \\ -0.162 \end{bmatrix}$$

Al resultar mayores que el límite, fijado en 0.1 p.u., se realiza una segunda iteración comenzando de nuevo por el problema de activa:

$$\begin{bmatrix} 22 & -12 \\ -12 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.413}{1.102} \\ \frac{-0.162}{1.1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1^2 \\ \theta_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.083 \\ 0.025 \end{bmatrix}$$

Con estos ángulos y las tensiones tras la primera iteración se determinan los residuos de reactiva:

$$|\Delta Q_1| = |-0.077| < 0.1$$

No es necesario realizar esta segunda subiteración para el problema reactivo al haberse alcanzado ya el nivel máximo de error permitido. En cuanto a los residuos de activa se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.018 \\ 0.020 \end{bmatrix}$$

también menores de 0.1 p.u.

El estado de la red obtenido es por lo tanto:

$$V^1 = \begin{bmatrix} V_0^1 \\ V_1^1 \\ V_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.102 \\ 1.1 \end{bmatrix} \quad \theta^1 = \begin{bmatrix} \theta_0^1 \\ \theta_1^1 \\ \theta_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.083 \\ 0.025 \end{bmatrix}$$

2. Para calcular las intensidades por los generadores se van a determinar las potencias complejas suministradas por cada uno de ellos.

$$\left. \begin{array}{l} P_0^G = P_0^{\text{cal}} + P_0^C \\ Q_0^G = Q_0^{\text{cal}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_0^G = 2.501 \\ Q_0^G = -2.479 \end{array} \right\} \Rightarrow S_0^G = 2.501 - 2.479j$$

$$\left. \begin{array}{l} P_2^G = 2 \\ Q_2^G = Q_2^{\text{cal}} = 1.711 \end{array} \right\} \Rightarrow S_2^G = 2 + 1.711j$$

Las intensidades que se obtienen por los generadores son:

$$I_0 = \frac{S_0^G}{V_0} = 3.521 \quad I_2 = \frac{S_2^G}{V_2} = 2.393$$

Utilizando las intensidades de base correspondientes, que en este caso son coincidentes y de valor $I_B = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_B} = 3.849$, se obtienen las intensidades en kA:

$$I_0 = 13.554 \text{ kA} \quad I_2 = 9.21 \text{ kA}$$

3. En este caso la matriz de admitancias de nudos incluiría la admitancia de la batería de condensadores en el nudo 1 con el valor correspondiente a los nominales asociados al mismo, es decir.

$$Y_1^{\text{cond}} = \frac{200}{200^2} = \frac{1}{200} \text{ S} \Rightarrow Y_1^{\text{cond}} = 2 \text{ p.u.}$$

De esta forma la matriz de admitancias de nudos vale:

$$Y = \begin{bmatrix} -25j & 10j & 15j \\ 10j & -20j & 12j \\ 15j & 12j & -27j \end{bmatrix}$$

El carácter de los nudos es el mismo que antes, difiriendo tan sólo en la tabla de datos e incógnitas la potencia reactiva especificada en el nudo 1, que pasa de ser $Q_1^{\text{esp}} = 1.2$ a $Q_1^{\text{esp}} = 0.8$.

Partiendo del mismo perfil de tensiones iniciales que se usó en el primer apartado, el método desacoplado rápido converge tras dos iteraciones completas obteniendo el siguiente vector de estado:

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.119 \\ 1.1 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.082 \\ 0.025 \end{bmatrix}$$

Si se calcula la potencia reactiva cedida por la batería de condensadores se obtiene:

$$Q^{\text{cond}} = V_1^2 \cdot Y_1^{\text{cond}} = 2.504 \text{ p.u.}$$

es decir, cede 223 Mvar en lugar de los 200 Mvar que corresponden cuando la tensión del nudo 1 es 1 p.u.

5.7. De la red de la Figura 5.8 se sabe que los generadores mantienen las tensiones en los nudos respectivos a 1 p.u. Así mismo, el transformador situado entre los embarrados 2 y 3 posee tomas variables en el lado del nudo 2. En el nudo 3 existe una batería de condensadores de admitancia 0.1 p.u. ($S_B = 100 \text{ MVA}$). El resto de los datos de la red se muestra en las Tablas 5.19 y 5.20.

1. Partiendo del perfil plano y de un valor para la toma del transformador de 1.1, resolver el reparto de cargas mediante el método desacoplado rápido (FDLF) con un error menor a 10^{-2} p.u.

- Tras analizar las tensiones obtenidas en el apartado anterior discutir la conveniencia o no de modificar el valor de la toma del transformador. En caso positivo proponer un nuevo valor y determinar el nuevo estado de la red sobre la base de la nueva relación de transformación adoptada.

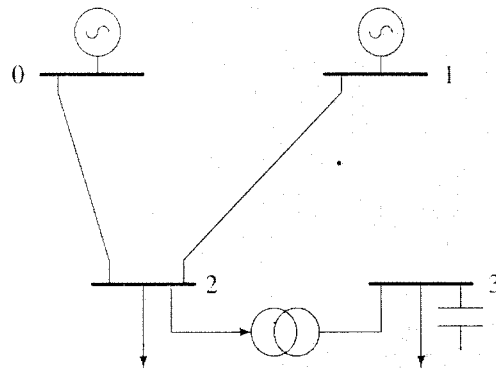


Figura 5.8 Esquema unifilar de la red del Problema 5.7.

Nodos	Tensiones en p.u.	Potencias
0	1.0	-
1	1.0	$P_G = 100 \text{ MW}, -75 < Q_G < 110 \text{ Mvar}$
2	-	$P_C = 100 \text{ MW}, Q_C = 100 \text{ Mvar}$
3	-	$P_C = 100 \text{ MW}, Q_C = 100 \text{ Mvar}$

Tabla 5.19 Datos de los nudos para la red de la Figura 5.8.

Ramas	Impedancias en p.u.	y^{shunt} en p.u.
0-2	$0.001 + 0.05j$	$0.1j$
1-2	$0.001 + 0.05j$	$0.1j$
2-3	$0.1j$	-

Tabla 5.20 Datos de las ramas de la red de la Figura 5.8.

Resolución

1. La matriz de admitancias de nudos, tras adoptar el modelo en π para el transformador, como se ha hecho en otros problemas anteriores, con un valor en la toma de 1.1 resulta ser:

$$Y = \begin{bmatrix} 0.4 - 19.942j & 0 & -0.4 + 19.992j & 0 \\ 0 & 0.4 - 19.942j & -0.4 + 19.992j & 0 \\ -0.4 + 19.992j & -0.4 + 19.992j & 0.8 - 48.148j & 9.091j \\ 0 & 0 & 9.091j & -9.9j \end{bmatrix}$$

La Tabla 5.21 define el carácter de cada nudo, PQ o PV, en función de los datos e incógnitas.

Nudo	Tipo	Datos	Incógnitas
0	Slack	$V_0 = 1.02$ $\theta_0 = 0.0$	P_0 Q_0
1	PV	$V_1 = 1.02$ $P_1 = 1.0$	θ_1 Q_1
2	PQ	$P_2 = -1.0$ $Q_2 = -1.0$	θ_2 V_2
3	PQ	$P_3 = -1.0$ $Q_3 = -1.0$	θ_3 V_3

Tabla 5.21 Datos e incógnitas del Problema 5.7.

Las ecuaciones a resolver son por tanto las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} P_1^{\text{esp}} - P_1^{\text{cal}} = 0 \\ P_2^{\text{esp}} - P_2^{\text{cal}} = 0 \\ Q_2^{\text{esp}} - Q_2^{\text{cal}} = 0 \\ P_3^{\text{esp}} - P_3^{\text{cal}} = 0 \\ Q_3^{\text{esp}} - Q_3^{\text{cal}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 - P_1^{\text{cal}} = 0 \\ -1 - P_2^{\text{cal}} = 0 \\ -1 - Q_2^{\text{cal}} = 0 \\ -1 - P_3^{\text{cal}} = 0 \\ -1 - Q_3^{\text{cal}} = 0 \end{array} \right\}$$

Partiendo de un perfil plano en las tensiones, el problema activo para la primera iteración del método desacoplado rápido (FDLF) resulta ser:

$$B' \Delta\theta = \frac{\Delta P}{V} \Rightarrow \begin{bmatrix} 20 & -20 & 0 \\ -20 & 50 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-0}{1.0} \\ \frac{-1-0}{1.0} \\ \frac{-1-0}{1.0} \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto se obtiene el nuevo vector de ángulos:

$$\theta^1 = \Delta\theta + \theta^0 = \begin{bmatrix} \theta_1^1 \\ \theta_2^1 \\ \theta_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.05 \\ -0.15 \end{bmatrix}$$

Con estos ángulos se obtienen los residuos de potencia reactiva para resolver el subproblema de reactiva:

$$B'' \Delta V = \frac{\Delta Q}{V} \Rightarrow \begin{bmatrix} 48.148 & -9.091 \\ -9.091 & 9.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+0.791}{1.0} \\ \frac{-1-0.855}{1.0} \end{bmatrix}$$

que actualiza el módulo de las tensiones en los nudos PQ

$$V^1 = \Delta V + V^0 = \begin{bmatrix} V_2^1 \\ V_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.952 \\ 0.769 \end{bmatrix}$$

Después de la primera iteración completa del reparto de cargas desacoplado rápido (FDLF), las tensiones nodales son:

$$V^1 = \begin{bmatrix} V_0^1 \\ V_1^1 \\ V_2^1 \\ V_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.952 \\ 0.769 \end{bmatrix} \quad \theta^1 = \begin{bmatrix} \theta_0^1 \\ \theta_1^1 \\ \theta_2^1 \\ \theta_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.05 \\ -0.15 \end{bmatrix}$$

Al finalizar la subiteración de reactiva se halla la potencia generada en el nudo 1, para así chequear los límites de reactiva del generador. Se obtiene $Q_1^{\text{cal}} = 0.915$, con lo que el generador está suministrando a la red 91.5 Mvar que no supera los límites del mismo.

Los residuos de potencia activa son:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.029 \\ 0.274 \\ -0.336 \end{bmatrix}$$

y, por lo tanto mayores del límite fijado en 0.01 p.u.

La segunda iteración del problema activo actualiza los ángulos:

$$\begin{bmatrix} 20 & -20 & 0 \\ -20 & 50 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.029}{1.0} \\ 0.274 \\ \frac{0.952}{0.952} \\ -0.336 \\ \frac{0.769}{0.769} \end{bmatrix} \Rightarrow \theta^2 = \Delta\theta + \theta^1 = \begin{bmatrix} \theta_1^2 \\ \theta_2^2 \\ \theta_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.555 \cdot 10^{-3} \\ -0.056 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

Se determinan los nuevos residuos de potencia reactiva y se resuelve este subproblema:

$$\begin{bmatrix} 48.148 & -9.091 \\ -9.091 & 9.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.084 \\ \frac{0.952}{0.952} \\ -0.265 \\ \frac{0.769}{0.769} \end{bmatrix} \Rightarrow V^2 = \Delta V + V^1 = \begin{bmatrix} V_2^2 \\ V_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.942 \\ 0.724 \end{bmatrix}$$

La potencia generada en el nudo 1, para comprobar los límites de reactiva del generador, resulta ser $Q_1^{\text{cal}} = 1.119 > 1.10$, con lo que el generador se encuentra fuera de límites. Esto transforma el carácter del nudo 1 que pasa a ser PQ, liberándose la tensión en él y fijando su reactiva en 1.1 p.u. Para determinar cómo afecta este cambio a las tensiones, se han de calcular las sensibilidades de todos los nudos con respecto a esta variación de reactiva en el nudo 1. Para ello se resuelve el sistema $B''_{\text{ampl}} S = \Delta Q$, con B''_{ampl} referente a todos los nudos PQ, y ΔQ reflejando el cambio de reactiva unitario en el nudo 1. El sistema resultante y su solución son:

$$\begin{bmatrix} 19.942 & -19.992 & 0 \\ -19.992 & 48.148 & -9.091 \\ 0 & -9.091 & 9.9 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 0.101 \\ 0.051 \\ 0.047 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidas las sensibilidades y sobre la base de la variación de reactiva que sufre el nudo 1, $\Delta Q_1 = Q_1^{\text{max}} - Q_1^{\text{cal}} = -0.019$, se recalculan las tensiones:

$$\begin{bmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \\ V_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.942 \\ 0.724 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_1 \cdot \Delta Q_1 \\ S_2 \cdot \Delta Q_1 \\ S_3 \cdot \Delta Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.998 \\ 0.941 \\ 0.723 \end{bmatrix}$$

Finalmente, después de la segunda iteración completa, las tensiones nodales son:

$$V^2 = \begin{bmatrix} V_0^2 \\ V_1^2 \\ V_2^2 \\ V_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.998 \\ 0.941 \\ 0.723 \end{bmatrix} \quad \theta^2 = \begin{bmatrix} \theta_0^2 \\ \theta_1^2 \\ \theta_2^2 \\ \theta_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.555 \cdot 10^{-3} \\ -0.056 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

Para ver si se ha alcanzado o no la convergencia se determinan de nuevo los residuos de potencia activa:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.011 \\ 0.175 \\ -0.114 \end{bmatrix}$$

Se ha de ir pues a una tercera iteración.

El método desacoplado rápido (FDLF) converge tras seis iteraciones completas, siendo la evolución de los residuos de potencia al principio de cada subiteración la que se muestra en la Figura 5.9.

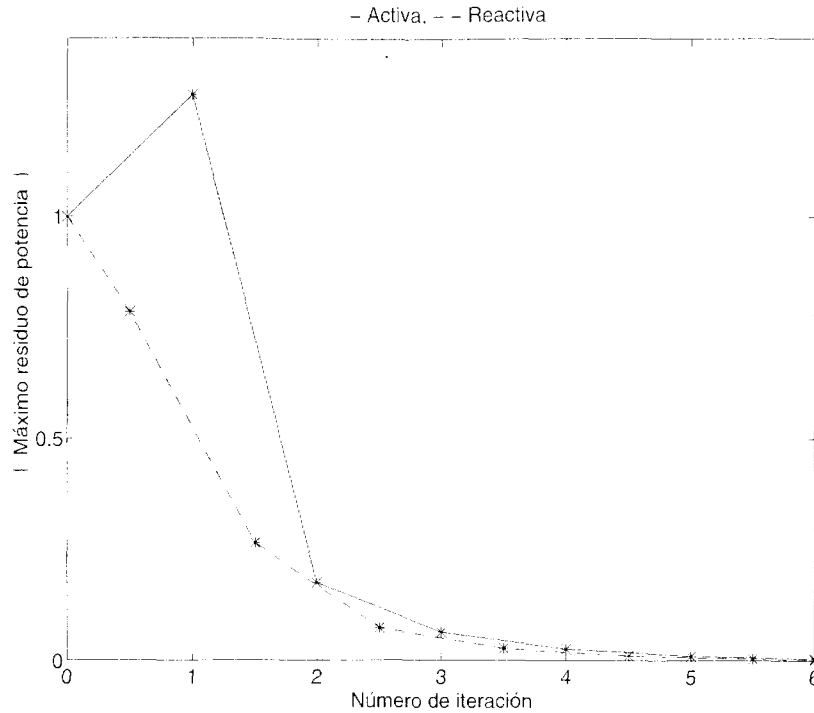


Figura 5.9 Evolución de los residuos en cada subiteración del Apartado 1 del Problema 5.7.

Los residuos de potencia activa y reactiva tras la sexta iteración son:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.058 \cdot 10^{-4} \\ 4.082 \cdot 10^{-3} \\ -2.662 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.128 \cdot 10^{-4} \\ -1.199 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Las tensiones en los nudos que se obtienen valen:

$$V^7 = \begin{bmatrix} V_0^7 \\ V_1^7 \\ V_2^7 \\ V_3^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.99 \\ 0.932 \\ 0.699 \end{bmatrix} \quad \theta^7 = \begin{bmatrix} \theta_0^7 \\ \theta_1^7 \\ \theta_2^7 \\ \theta_3^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.369 \cdot 10^{-4} \\ -0.053 \\ -0.222 \end{bmatrix}$$

La reactiva inyectada por el generador en el nudo 1 resulta $Q_1^{\text{cal}} = 1.1$ y, en consecuencia, éste se encuentra justo en el límite de potencia reactiva, no pudiendo mantener la tensión a 1 p.u. pero sí muy próxima, 0.99 p.u.

2.- Si se analizan las tensiones obtenidas en el apartado anterior, se puede ver claramente que la tensión del nudo 3 resulta inadmisibles por ser demasiado baja, 0.699 p.u. Una posibilidad para aumentar esta tensión consiste en bajar la toma del transformador. Convendría por tanto analizar el reparto de cargas haciendo la toma del transformador igual a su límite inferior 0.9 p.u.

Procediendo de forma similar al apartado anterior una vez actualizada la matriz de admitancias de nudos con el nuevo valor de la toma, el método desacoplado rápido (FDLF) converge en tres iteraciones completas obteniendo el siguiente vector de tensiones:

$$V^3 = \begin{bmatrix} V_0^3 \\ V_1^3 \\ V_2^3 \\ V_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.944 \\ 0.948 \end{bmatrix} \quad \theta^3 = \begin{bmatrix} \theta_0^3 \\ \theta_1^3 \\ \theta_2^3 \\ \theta_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.557 \cdot 10^{-4} \\ -0.052 \\ -0.153 \end{bmatrix}$$

y los siguientes residuos de potencia

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.170 \cdot 10^{-4} \\ 7.435 \cdot 10^{-4} \\ -1.290 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.07 \cdot 10^{-4} \\ -1.36 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

En la Figura 5.10 se muestra la evolución de los residuos de potencia para este caso.

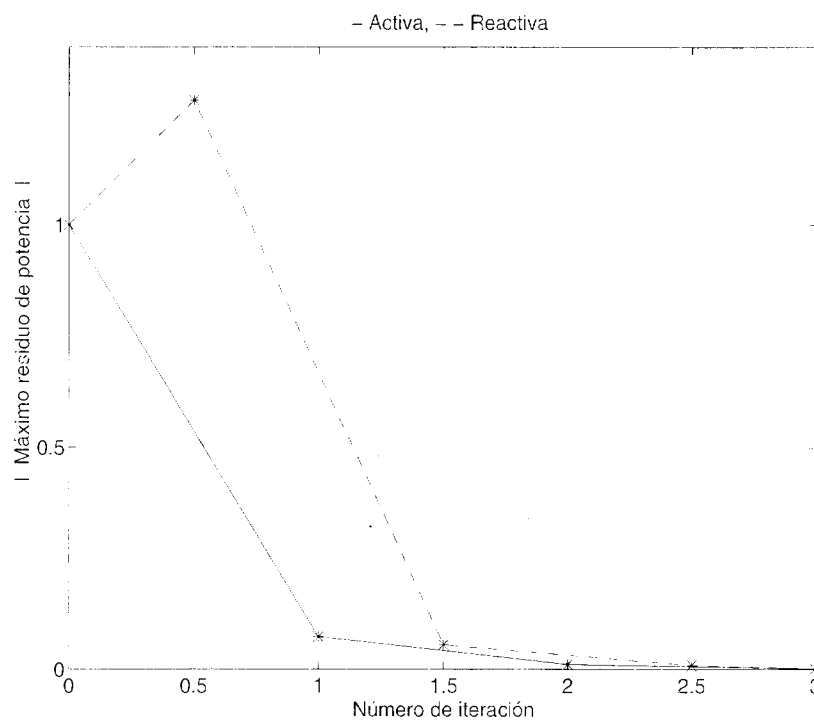


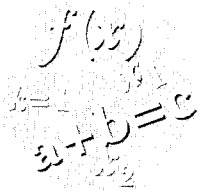
Figura 5.10 Evolución de los residuos en cada subiteración del Apartado 2 del Problema 5.7.

La reactiva inyectada en 1 resulta ser de 10.75 Mvar, encontrándose por tanto dentro de límites y pudiendo así mantenerse a 1 p.u. la tensión en dicho nudo. Además de haberse conseguido esto, se ha mejorado drásticamente la tensión del nudo 3 con respecto al caso inicial, pasando de 0.699 p.u. a 0.948 p.u.

Parte II

**CONTROL DEL SISTEMA DE
POTENCIA**





CONTROL DE FRECUENCIA

En la explotación diaria de un sistema eléctrico, tanto las tensiones como la frecuencia de las señales deben ser objeto de un adecuado control. La práctica demuestra la conveniencia de desacoplar ambos problemas, dando lugar a los controles *frecuencia/potencia activa* y *tensión/potencia reactiva*. Así, mientras que la frecuencia de las señales en la red muestra una fuerte dependencia de las variaciones en la potencia activa que se genera, transporta y consume en la red, los módulos de las tensiones en los nudos eléctricos se ven afectados principalmente por cambios en la potencia reactiva.

Históricamente, la fuerte dependencia entre potencia activa y frecuencia hacía de la monitorización y control de la frecuencia de la red la principal actividad en la explotación del sistema buscando asegurar en cada momento el balance entre generación y consumo, siempre que el sistema dispusiera de los suficientes recursos de potencia reactiva para mantener las tensiones próximas a sus valores nominales.

No obstante, pronto se comprendió que el control de la generación de potencia activa no era suficiente. De hecho, una mala gestión de las tensiones puede hacer impracticables los flujos de potencia activa, comprometiendo la viabilidad del sistema.

En la actualidad, el problema del control *potencia activa/frecuencia* ha alcanzado una solución práctica satisfactoria con la implementación, totalmente automática en la mayoría de los casos, de determinados algoritmos de control que reúnen simultáneamente las características de sencillez, fiabilidad y bajo requerimiento de información en tiempo real. La eficiencia de la implementación de dicho control se debe principalmente a la utilización de una estructura jerárquica en varios niveles (Figura 6.1):

- Un primer nivel, de respuesta rápida y de carácter local, basado principalmente en los reguladores de velocidad de los generadores. Su misión consiste en estabilizar las perturbaciones de frecuencia en la red debidas a desequilibrios de potencia.
- Un segundo nivel, lento y de carácter zonal, encargado de fijar las consignas de generación de los reguladores del nivel primario, basado en criterios de mínimo coste de explotación.
- Un tercer nivel, presente en sistemas eléctricos divididos en áreas de control (por ejemplo, como consecuencia de la coexistencia de varias compañías eléctricas), y cuya misión consiste en coordinar las distintas áreas de control, introduciendo criterios de optimalidad a nivel global.

No obstante, es necesario tener en cuenta que el desacople de los problemas de control relativos a las potencias activa y reactiva no es perfecto debido a que cualquier actuación o perturbación sobre la red

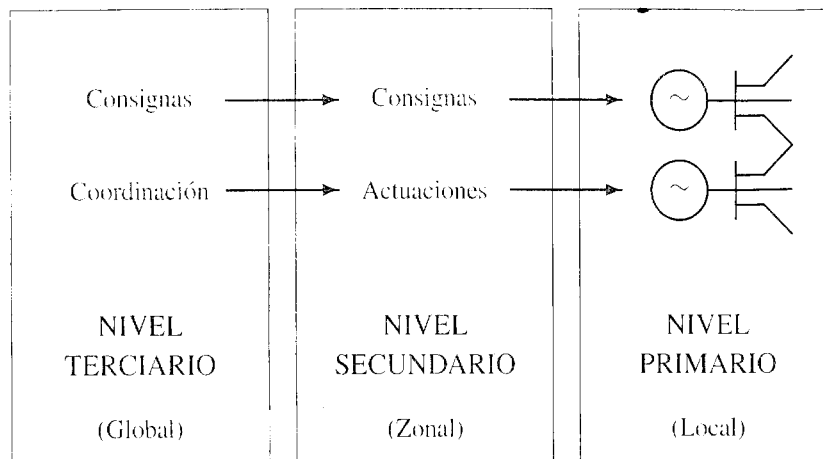


Figura 6.1 Estructura jerárquica de los mecanismos de control en un sistema eléctrico.

siempre afecta a ambos problemas en mayor o menor medida. Este hecho es particularmente relevante en los fenómenos que ponen en entredicho la estabilidad del sistema y en los transitorios debidos a actuaciones sobre controles de elevada ganancia.

EL GENERADOR

El conjunto turbina-generator constituye un sistema mecánico que realiza la conversión de potencia mecánica, P_m , en potencia eléctrica, P_e . La diferencia de potencias se invierte en acelerar dicho sistema:

$$P_m - P_e = \omega I \alpha = M \alpha$$

donde ω y α son la velocidad y la aceleración angular respectivamente, I es el momento de inercia y M es el momento angular del conjunto.

Considerando variaciones respecto al equilibrio ($P_m = P_e$), podemos reescribir la ecuación anterior en el dominio de Laplace como:

$$\Delta P_m - \Delta P_e = M_n s \Delta \omega$$

siendo $M_n = \omega_n I$ el momento angular a velocidad nominal.

La potencia mecánica que utiliza la turbina para su conversión viene gobernada por la posición de la válvula que regula la entrada de agua, vapor u otra fuente de energía.

EL SISTEMA ELÉCTRICO

La potencia eléctrica que absorbe el sistema puede variar respecto a un punto de equilibrio debido a dos componentes. La primera es por la variación de la demanda, ΔP_C , mientras que la segunda, gobernada por el coeficiente D de sensibilidad de la carga frente a la frecuencia de trabajo, da cuenta de dicho fenómeno:

$$\Delta P_e = \Delta P_C + D \Delta \omega$$

Éste es el primer mecanismo de control de frecuencia que encontramos. Actúa produciendo variaciones en la posición de la válvula de la turbina, y, por tanto, una variación en la potencia mecánica, sobre la base de dos entradas. La primera es $\Delta f = 2\pi \Delta \omega$, diferencia entre la frecuencia medida mediante un

tacómetro y la consigna de frecuencia de la red, 50 Hz en Europa, 60 Hz en buena parte de América. La segunda entrada de este control es la variación en la potencia de consigna del generador, ΔP_{ref} :

$$\Delta P_m = \Delta P_{ref} - \frac{1}{R} \Delta f$$

donde R , en Hz/MW, es la constante del regulador que expresa el cambio de frecuencia que hace que el generador pase de trabajar en vacío a plena carga.

Un control proporcional como éste no es capaz de evitar los errores en régimen permanente, por lo que serán necesarios otros mecanismos de control.

El control de velocidad se muestra insuficiente a la hora de garantizar la frecuencia nominal en la red, por lo que se hace necesario un control secundario que actúe sobre la consigna del control primario.

SISTEMA AISLADO

En un sistema aislado, sin intercambios de potencia con el exterior, es posible garantizar la frecuencia nominal mediante un control integral. Si tenemos un único generador, o un generador equivalente de un conjunto de ellos, bastará con utilizar un control que en el dominio de Laplace tenga la ecuación:

$$\Delta P_{ref} = \frac{K}{s} \Delta f$$

En el caso de varios generadores, habrá que elaborar alguna estrategia de reparto de ΔP_{ref} entre aquellos que participen en el control en razón a la potencia nominal, la velocidad de actuación o consideraciones económicas.

SISTEMA INTERCONECTADO

En una red eléctrica con interconexiones, además del problema del control de frecuencia, surge el de satisfacer los intercambios P_{ij} pactados con otras redes. Para solucionar dicho problema, se acude a un control integral sobre una magnitud, el error de control de área (ECA), que, para un área i , se define como:

$$ECA_i = \sum_j \Delta P_{ij} + \beta_i \Delta f$$

Siendo ΔP_{ij} la variación en la potencia que el área i exporta al área j a través de sus interconexiones. En la práctica, el valor de β_i que se adopta está relacionado con la constante estática equivalente de la red R_{eqi} y el coeficiente de sensibilidad de la carga frente a la frecuencia D_i , siendo un valor con buenas propiedades $\beta_i = 1/R_{eqi} + D_i$, ya que en ese caso el ECA se interpreta como el exceso de generación del área. En la Figura 6.2 se muestra un esquema con este bucle de control.

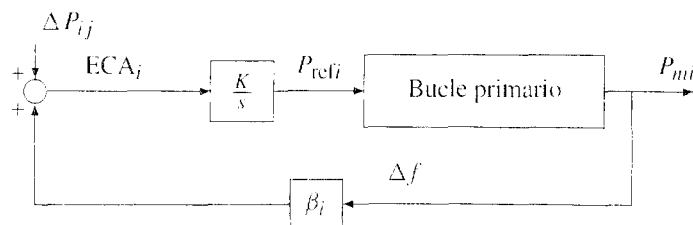


Figura 6.2 Esquema de control secundario potencia-frecuencia.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 6.1.** Un grupo turbina-generador de 500 MVA, 50 Hz tiene una constante de regulación de 0.05 p.u. Si la red a la que se conecta el generador sufre un $\Delta f = 0.01$ Hz en régimen permanente, calcular la variación de la potencia mecánica suministrada por la turbina. Calcular asimismo el cambio de consigna necesario para mantener la potencia del generador.

Resolución

La variación de frecuencia, en p.u., es:

$$\Delta f = \frac{0.01}{50} = 2 \cdot 10^{-4}$$

La variación de potencia mecánica, teniendo en cuenta que no existe modificación de consigna ($\Delta P_{\text{ref}} = 0$) es, en p.u.:

$$\Delta P_m = \Delta P_{\text{ref}} - \frac{1}{R} \Delta f = -4 \cdot 10^{-3} \text{ p.u.} = -2 \text{ MW}$$

Para restablecer la potencia, será necesario un cambio en la potencia de referencia:

$$\Delta P_m = 0 = \Delta P_{\text{ref}} - \frac{1}{R} \Delta f \Rightarrow \Delta P_{\text{ref}} = \frac{1}{R} \Delta f = 2 \text{ MW}$$

Luego, suponiendo que dicho cambio no afecta a la frecuencia de la red, concluimos que es necesario subir 2 MW la referencia de potencia generada.

- 6.2.** Dos generadores síncronos de 50 Hz suministran potencia a una misma carga. El primer generador tiene una constante de regulación $R_1 = 0.03$ p.u. sobre una base de 337 MW, mientras que el segundo tiene $R_2 = 0.05$ p.u. en una base de 420 MW. Determinar la fracción que asume cada generador de un incremento de demanda del 10% de la capacidad máxima de generación.

Resolución

Pasaremos, en primer lugar las constantes de regulación a una misma base, que será la capacidad máxima de generación, $S' = 757$ MW. El cambio de base lo realizaremos con la expresión:

$$R' = R \cdot \frac{S'}{S} \quad (6.1)$$

obteniendo

$$R_1 = 0.03 \cdot \frac{757}{337} = 0.0674$$

$$R_2 = 0.05 \cdot \frac{757}{420} = 0.0901$$

Puesto que para un incremento en la demanda ΔP , ignorando las pérdidas, se tiene que:

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = -\frac{\Delta f}{R_1} - \frac{\Delta f}{R_2}$$

la constante de regulación equivalente satisface

$$\frac{1}{R} = -\frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

de donde obtenemos $R = 0.0384$.

La variación de frecuencia para $\Delta P = 0.1$ p.u. es:

$$\Delta f = -R \Delta P = -0.00384 \text{ p.u.} = -0.1928 \text{ Hz}$$

con lo cual

$$\Delta P_1 = -\frac{\Delta f}{R_1} = 0.0572 \text{ p.u.} = 43.32 \text{ MW}$$

$$\Delta P_2 = -\frac{\Delta f}{R_2} = 0.0428 \text{ p.u.} = 32.39 \text{ MW}$$

o lo que es lo mismo, el incremento de potencia ΔP es asumido en un 57.2% por el generador 1, y en un 42.8% por el 2.

- 6.3.** Un área de un sistema eléctrico de 60 Hz posee tres unidades de generación de 1000, 750 y 500 MVA. La constante de regulación de las unidades es de 0.05 en p.u., tomando como base la potencia nominal de cada unidad. Cada generador está trabajando inicialmente a la mitad de su capacidad, produciéndose un incremento de carga en la red de 200 MW. Calcular: a) El incremento de frecuencia en régimen permanente. b) La variación de la potencia generada por cada unidad.

Resolución

Es necesario expresar R en una única base $S_B = 1000$ MVA, por lo que usaremos la Ecuación (6.1), con la que obtenemos:

$$R_1 = 0.05$$

$$R_2 = 0.05 \cdot \frac{1000}{750} = 0.066$$

$$R_3 = 0.05 \cdot \frac{1000}{500} = 0.1$$

Para cada generador i , en régimen permanente

$$\Delta P_{mi} = \Delta P_{Ri} - \frac{1}{R_i} \Delta f$$

y teniendo en cuenta que $\Delta P_{R1} = \Delta P_{R2} = \Delta P_{R3} = 0$:

$$\sum \Delta P_m = 0.2 = -\Delta f / R_{eq}$$

donde $1/R_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 45$ p.u. Así, obtenemos:

$$\Delta f = -4.44 \cdot 10^{-3} \text{ p.u.} = -0.26 \text{ Hz}$$

Dicha variación en la frecuencia lleva asociada variaciones en las potencias de los generadores:

$$\Delta P_{m1} = -\frac{1}{R_1} \Delta f = 0.088 \text{ p.u.} = 88 \text{ MW}$$

$$\Delta P_{m2} = -\frac{1}{R_2} \Delta f = 0.067 \text{ p.u.} = 67 \text{ MW}$$

$$\Delta P_{m3} = -\frac{1}{R_3} \Delta f = 0.044 \text{ p.u.} = 44 \text{ MW}$$

Puede verse que ha habido un reparto del incremento de demanda proporcional a las potencias nominales debido a que los generadores poseen las mismas constantes R en sus bases correspondientes.

- 6.4. Un sistema eléctrico de 50 Hz está constituido por dos áreas interconectadas, de las siguientes características:

	Área 1	Área 2
Capacidad de generación	2000 MW	4000 MW
β	700 MW/Hz	1400 MW/Hz

Cada área está generando la mitad de su capacidad de generación cuando se produce un aumento repentino de carga en el área 1 de 100 MW. Calcular la variación en régimen permanente de la frecuencia y de la potencia intercambiada por las áreas con y sin control secundario potencia-frecuencia.

Nota: despreciar el coeficiente D de sensibilidad de la carga ante la frecuencia.

Resolución

Consideramos en primer lugar el caso sin control secundario potencia-frecuencia, con lo que todo el control recae en el bucle primario. Las ecuaciones de dicho bucle son, para ambas áreas:

$$\Delta P_{m1} = \Delta P_{R1} - \beta_1 \Delta f$$

$$\Delta P_{m2} = \Delta P_{R2} - \beta_2 \Delta f$$

Por no haber regulación secundaria, las consignas no varían ($\Delta P_{R1} = \Delta P_{R2} = 0$). Además, sabemos que el incremento de carga debe ser asumido por las dos áreas, $\Delta P_{m1} + \Delta P_{m2} = 100$ MW.

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$100 \text{ MW} = -(\beta_1 + \beta_2) \Delta f$$

luego $\Delta f = -0.047$ Hz, con lo que las variaciones en las potencias generadas serán:

$$\Delta P_{m1} = -\beta_1 \Delta f = 33.33 \text{ MW}$$

$$\Delta P_{m2} = -\beta_2 \Delta f = 66.66 \text{ MW}$$

Realizando un balance de potencias en el área 1 resulta que:

$$\Delta P_{12} = \Delta P_{m1} - \Delta P_{C1}$$

y con $\Delta P_{C1} = 100$ MW, obtenemos

$$\Delta P_{21} = -\Delta P_{12} = 66.66 \text{ MW}$$

Consideramos ahora la presencia de un control secundario como el esquematizado en la Figura 6.2, de respuesta más lenta que el control primario, pero capaz de anular el error en frecuencia,

$$ECA_1 = \Delta P_{12} + \beta_1 \Delta f$$

$$ECA_2 = \Delta P_{21} + \beta_2 \Delta f$$

Un esquema como el de la figura citada consigue $ECA_1 = ECA_2 = 0$, que junto a la identidad $\Delta P_{12} = -\Delta P_{21}$ conduce a $(\beta_1 + \beta_2) \Delta f = 0$ y, por tanto, a $\Delta f = \Delta P_{12} = \Delta P_{21} = 0$.

Es decir, un control integral como el considerado, modifica las consignas de generación P_{Ri} hasta restituir tanto la frecuencia como los intercambios a sus valores especificados.

En este caso, puesto que:

$$\Delta P_{mi} = \Delta P_{Ci} + \Delta P_{12} = \Delta P_{Ci}$$

y

$$\Delta P_{mi} = \Delta P_{Ri} - \beta \Delta f = \Delta P_{reli}$$

concluimos que $\Delta P_{R1} = \Delta P_{C1} = 100$ MW, y $\Delta P_{R2} = \Delta P_{C2} = 0$.

- 6.5. Un sistema eléctrico de 50 Hz se compone de dos áreas sin bucle secundario de control $P-f$, interconectadas mediante una línea de enlace. Si se produce un incremento repentino de carga en el área A de $\Delta P_{CA} = 500$ MW, se observa que la potencia activa intercambiada por las áreas se incrementa a su vez en $\Delta P_{BA} = 300$ MW, con sentido de B a A. Si se abre la línea de enlace, la frecuencia de cada área pasa a ser $f_a = 49$ Hz y $f_b = 50$ Hz en régimen permanente. Determinar las constantes de regulación de las áreas (R_A y R_B) y el valor inicial de la potencia intercambiada P_{BA} .

Nota: Despreciar el coeficiente D de sensibilidad de la carga a la frecuencia.

Resolución

En la situación de enlace abierto, el área 1 asume el incremento de carga ΔP_{CA} en solitario, debiendo por tanto aumentar su generación:

$$\Delta P_{mA} = \Delta P_{CA} = 500 \text{ MW}$$

siendo en esa situación el error de frecuencia $\Delta f = 49 - 50 = -1$ Hz.

La constante de regulación de dicha área se obtiene de la ecuación de su bucle primario:

$$\Delta P_{mA} = \Delta P_{RA} - \frac{1}{R_A} \Delta f = -\frac{1}{R_A} \Delta f$$

luego $R_A = -\Delta f / \Delta P_{mA} = 0.002$ Hz/MW.

En la situación previa, con interconexión, el balance de potencia en A nos dice que:

$$\Delta P_{mA} = \Delta P_{CA} - \Delta P_{BA} = 200 \text{ MW}$$

por lo que el error de frecuencia del sistema interconectado será

$$\Delta f = -\Delta P_{mA} \cdot R_A = -0.4 \text{ Hz}$$

Puesto que dicha variación de frecuencia es la que hace aumentar P_{mB} de acuerdo con $\Delta P_{mB} = \Delta P_{CB} + \Delta P_{BA} = 300$ MW, obtendremos su constante de regulación de:

$$\Delta P_{mB} = -\frac{1}{R_B} \Delta f$$

Luego $R_B = -\Delta f / \Delta P_{mB} = 0.00133$ Hz/MW.

En cuanto a la potencia que se intercambiaba inicialmente, consideraremos el área B en la situación de enlace desconectado. Como en dicho estado la frecuencia se mantiene a 50 Hz, $\Delta f = 0$ respecto a la situación inicial y por tanto:

$$\Delta P_{mB} = -\frac{1}{R_B} \Delta f = \Delta P_{BA} + \Delta P_{CB} = 0$$

Puesto que no ha habido incremento de carga en el área B, $\Delta P_{CB} = 0$, tenemos $\Delta P_{BA} = 0$, y teniendo en cuenta que en esta situación el intercambio es nulo, concluimos que también lo era inicialmente, cuando había conexión:

$$P_{BA}^{\text{inicial}} = P_{BA}^{\text{final}} - \Delta P_{BA} = 0 - 0 = 0$$

- 6.6. Un sistema eléctrico de 50 Hz está formado por dos áreas interconectadas. El área 1 tiene una capacidad de generación de 1000 MW, una constante de regulación $R_1 = 0.0025$ Hz/MW y un coeficiente de sensibilidad de la carga frente a la frecuencia $D_1 = 1$ p.u. La capacidad de generación del área 2 es de 2000 MW, su constante de regulación $R_2 = 0.00125$ Hz/MW y la sensibilidad de la carga $D_2 = 2$ p.u. Inicialmente cada sistema se encuentra suministrando una potencia igual a la mitad de su capacidad total de generación, la frecuencia es de 50 Hz y no existe intercambio de potencia entre las áreas. Si repentinamente se produce un aumento del consumo de 300 MW en el área 1, determinar el error de frecuencia y la potencia intercambiada en régimen permanente, en las siguientes situaciones:

1. No existe bucle secundario de control de frecuencia en ninguna área.
2. Cada área posee su propio control secundario de frecuencia que se encarga de anular el error de control del área (ECA) correspondiente mediante un control integral. Las constantes ca-

racterísticas del control secundario de cada área son respectivamente $\beta_1 = 400$ MW/Hz y $\beta_2 = 800$ MW/Hz respectivamente.

3. El control secundario del área 1 no está en servicio debido a un fallo en las comunicaciones, actuando únicamente el control secundario del área 2, con $\beta_2 = 800$ MW/Hz.

Resolución

En este problema optaremos por trabajar en unidades físicas, por lo que en primer lugar debemos pasar los coeficiente D_1 y D_2 a MW/Hz.

$$D_1 = 1 \cdot \frac{1000 \text{ MW}}{50 \text{ Hz}} = 20 \text{ MW/Hz}$$

$$D_2 = 2 \cdot \frac{2000 \text{ MW}}{50 \text{ Hz}} = 80 \text{ MW/Hz}$$

En el Apartado 1 debe considerarse que no existe bucle de control secundario de frecuencia que modifique las consignas de los generadores, por lo que:

$$\Delta P_{mi} = \Delta P_{Ri} - \frac{1}{R_i} \Delta f = -\frac{1}{R_i} \Delta f$$

La variación en la demanda de cada área puede escribirse como:

$$\Delta P_{ei} = \Delta P_{Ci} + D_i \Delta f$$

siendo $\Delta P_{C1} = 300$ MW y $\Delta P_{C2} = 0$.

Y las ecuaciones de balance de cada área:

$$\begin{aligned} \Delta P_{12} &= \Delta P_{m1} - \Delta P_{e1} \\ \Delta P_{21} &= \Delta P_{m2} - \Delta P_{e2} \end{aligned}$$

La ecuación de la interconexión es $\Delta P_{12} = -\Delta P_{21}$, lo que conduce a

$$-\frac{1}{R_1} \Delta f - \Delta P_{C1} - D_1 \Delta f = \frac{1}{R_2} \Delta f + \Delta P_{C2} + D_2 \Delta f$$

y despejando Δf :

$$\Delta f = \frac{-\Delta P_{C1} - \Delta P_{C2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + D_1 + D_2} = \frac{-300 - 0}{400 + 800 + 20 + 80} = -0.2307 \text{ Hz}$$

Luego, el error de intercambio es:

$$\Delta P_{12} = \left[-\frac{1}{R_1} - D_1 \right] \Delta f - \Delta P_{C1} = -203.076 \text{ MW}$$

El área 2 pasa a aportar 203.076 MW al área 1.

En el Apartado 2, cada área dispone de un control secundario de frecuencia de tipo integral, por lo que los respectivos ECA_i tenderán a 0.

$$ECA_1 = \Delta P_{12} + \beta_1 \Delta f = 0$$

$$ECA_2 = \Delta P_{21} + \beta_2 \Delta f = 0$$

Sumando ambas ecuaciones y teniendo en cuenta que $P_{12} + P_{21} = 0$, tenemos:

$$(\beta_1 + \beta_2) \Delta f = 0$$

luego $\Delta f = 0$ y $\Delta P_{12} = 0$, por lo que continúa sin haber intercambio.

Nótese que el resultado anterior ha sido obtenido para valores de β_1 y β_2 cualesquiera, mientras que la suma $\beta_1 + \beta_2$ sea distinta de 0.

En el Apartado 3 el control secundario del área 1 se encuentra fuera de servicio, por lo que no se cambiará la consigna de potencia, $\Delta P_{R1} = 0$:

$$\Delta P_{m1} = -\frac{1}{R_1} \Delta f$$

El área 2, al disponer del control secundario, debe satisfacer que:

$$ECA_2 = \Delta P_{21} + \beta_2 \Delta f = 0$$

Por otro lado, el balance de potencias en el área 1 nos dice que:

$$\Delta P_{m1} + \Delta P_{12} = \Delta P_{e1} = \Delta P_{C1} + D_1 \Delta f$$

Sustituyendo, tenemos:

$$-400\Delta f - 800\Delta f = 300 + 20\Delta f$$

Luego $\Delta f = \frac{-300}{1220} = -0.2459$ Hz y $\Delta P_{21} = -800\Delta f = 196.72$ MW. Es decir, el área 2 acude en ayuda del área 1 aportando 196.72 MW.

6.7. Un sistema eléctrico está constituido por 3 áreas interconectadas mediante las correspondientes líneas eléctricas, con una frecuencia común de 50 Hz, como se muestra en la Figura 6.3. Sabiendo que sólo el área 2 posee un control automático centralizado del error de control de área (ECA), con $\beta_2 = \frac{1}{R_2} + D_2$, y que inicialmente los flujos de potencia entre las áreas son los indicados en la figura. Determinar:

1. La nueva frecuencia en régimen permanente tras un aumento repentino de la demanda en el área 3 de 50 MW.
2. Los nuevos flujos de potencia entre áreas, sabiendo que, en el nuevo régimen permanente, la línea que une las áreas 2 y 3 dispara por sobrecarga.

Datos: $D_1 = D_2 = 20$ MW/Hz, $D_3 = 10$ MW/Hz, $R_1 = R_3 = 0.02$ Hz/MW, $R_2 = 0.01$ Hz/MW

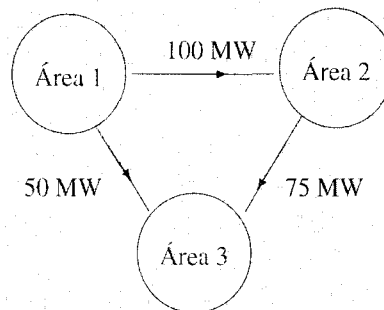


Figura 6.3 Sistema con tres áreas interconectadas.

Resolución

En este problema, las áreas 1 y 3 sólo disponen de control local, por lo que $\Delta P_{rel i} = 0$ y la ecuación de control queda:

$$\Delta P_{mi} = -\frac{1}{R_i} \Delta f$$

En cambio, el área 2 posee control secundario, lo que obliga a que:

$$ECA_2 = \Delta P_{21} + \Delta P_{23} + \beta_2 \Delta f = 0$$

Tras el incremento de carga $\Delta P_{C3} = 50$ MW que se indica en el Apartado 1, se produce una variación de frecuencia que calculamos a partir de la ecuación de balance de la región comprendida por las áreas 1 y 3:

$$\Delta \text{Generación} + \Delta \text{Importación} = \Delta \text{Consumo}$$

que formulamos como

$$\Delta P_{m1} + \Delta P_{m3} + \Delta P_{21} + \Delta P_{23} = D_1 \Delta f + \Delta P_{C3} + D_3 \Delta f$$

Usando las ecuaciones de los respectivos controles, tenemos que:

$$\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right) \Delta f - \beta_2 \Delta f = (D_1 + D_3) \Delta f + \Delta P_{C3}$$

Definiendo β_i también para las áreas 1 y 3 como $\beta_i = \frac{1}{R_i} + D_i$, la ecuación anterior queda:

$$\Delta f = \frac{-\Delta P_{C3}}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = \frac{-50}{70 + 120 + 60} = -0.2 \text{ Hz}$$

En dicha situación resulta fácil calcular magnitudes como los cambios de generación

$$\Delta P_{m1} = \Delta P_{m3} = -\frac{1}{0.02} \Delta f = 10 \text{ MW}$$

y aplicando la ecuación de balance global:

$$\Delta P_{m1} + \Delta P_{m2} + \Delta P_{m3} = D_1 \Delta f + D_2 \Delta f + \Delta P_{C3} + D_3 \Delta f$$

Luego $\Delta P_{m2} = 30 + 50 \Delta f = 20$ MW.

Sin embargo, los flujos por las líneas de intercambio resultan estar indeterminados en presencia de las tres interconexiones: tres incógnitas de intercambio ligadas sólo por dos ecuaciones independientes. No obstante, al introducir la restricción adicional del Apartado 2, $P_{23} = 0$ y por tanto $\Delta P_{23} = -75$ MW, dicho problema se solventa. En esta situación, el resultado de todas las magnitudes obtenidas es el mismo, y utilizando la ecuación de balance del área 2:

$$\Delta P_{21} = -\beta_2 \Delta f - \Delta P_{23} = 99 \text{ MW}$$

con lo que el nuevo flujo es $P_{12} = 100 - 99 = 1$ MW.

En cuanto al flujo de 1 a 3, planteamos la ecuación de balance del área 3:

$$\Delta P_{m3} + \Delta P_{13} + \Delta P_{23} = \Delta P_{e3} = \Delta P_{C3} + D_3 \Delta f$$

$$\Delta P_{13} = -\Delta P_{m3} - \Delta P_{23} + \Delta P_{C3} + D_3 \Delta f = -10 + 75 + 50 - 2 = 113 \text{ MW}$$

Luego el nuevo flujo será $P_{13} = 50 + 113 = 163$ MW.

6.8. Un sistema de 50 Hz consta de tres áreas interconectadas, con capacidad de generación de 800, 600 y 800 MW respectivamente. Dichas áreas poseen constantes de regulación $R_1 = R_2 = 0.025$ Hz/MW y $R_3 = 0.0125$ Hz/MW, así como sensibilidades carga-frecuencia $D_1 = D_3 = 16$ MW/Hz y $D_2 = 24$ MW/Hz. Las tres áreas se encuentran generando a la mitad de su capacidad, de modo que los intercambios entre áreas son nulos.

1. El área 3 dispone de control secundario de frecuencia integral, ¿qué valor debe tener la constante β_3 para que el error de intercambio de área ECA3 iguale al superávit de generación de dicha área?
2. Con el valor de β_3 obtenido en el apartado anterior, calcular el error en frecuencia si en el área 1 se produce un incremento brusco de la carga de 100 MW.
3. En la situación anterior, se abre la conexión entre las áreas 2 y 3, calcular el nuevo error en frecuencia, así como los intercambios entre áreas. ¿Ha habido variación en las consignas de potencia del área con control secundario?

Resolución

En el Apartado 1 se nos pide que obtengamos el valor de β_3 para el que:

$$ECA_3 = \Delta P_{31} + \Delta P_{32} + \beta_3 \Delta f = -\Delta P_{C3}$$

Usaremos para ello la ecuación de balance del área 3, en la que consideramos $\Delta P_{R3} = 0$:

$$\Delta P_{m3} = -\frac{1}{R_3} \Delta f = \Delta P_{31} + \Delta P_{32} + \Delta P_{C3} + D_3 \Delta f$$

sustituyendo

$$-\frac{1}{R_3} \Delta f = -\Delta P_{C3} - \beta_3 \Delta f + \Delta P_{C3} + D_3 \Delta f$$

Luego $\beta_3 = \frac{1}{R_3} + D_3$.

En el Apartado 2 debemos estudiar el caso de un incremento de carga $\Delta P_{C1} = 100$ MW. Para ello usamos las siguientes ecuaciones de cada área:

- Área 1:

$$\Delta P_{m1} = -\frac{1}{R_1} \Delta f = \Delta P_{12} + \Delta P_{13} + \Delta P_{C1} + D_1 \Delta f$$

- Área 2:

$$\Delta P_{m2} = -\frac{1}{R_2} \Delta f = -\Delta P_{12} + \Delta P_{23} + D_2 \Delta f$$

- Área 3: Considerando que su control secundario se encarga de conseguir $ECA_3 = 0$:

$$0 = -\Delta P_{13} - \Delta P_{23} + \beta_3 \Delta f$$

Sumando las tres ecuaciones, se cancelan los intercambios y teniendo en cuenta $\beta_3 = 1/R_3 + D_3$ conseguimos:

$$\Delta f = \frac{-\Delta P_{C1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + D_1 + D_2 + D_3} = -0.463 \text{ Hz}$$

En el Apartado 3, se impone la condición adicional de que el intercambio P_{23} es nulo, por estar la línea abierta, y como también lo era anteriormente, tendremos $\Delta P_{23} = 0$. Este hecho no modifica la obtención de Δf realizada en el Apartado 2, por lo que conseguimos el mismo valor. Sin embargo, ahora sí podemos determinar los intercambios:

- Ecuación del área 2:

$$\Delta P_{12} = \frac{1}{R_2} \Delta f + D_2 \Delta f = -29.63 \text{ MW}$$

- Ecuación del área 3:

$$\Delta P_{13} = \beta_3 \Delta f = -44.444 \text{ MW}$$

Respecto a la variación de consigna en el área 3, la podemos obtener de:

$$\Delta P_{m3} = \Delta P_{ref3} - \frac{1}{R_3} \Delta f = \Delta P_{31} + \Delta P_{32} + \Delta P_{C3} + D_3 \Delta f$$

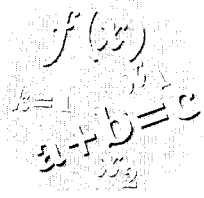
de donde

$$\Delta P_{ref3} = \left(\frac{1}{R_3} + D_3 \right) \Delta f + \Delta P_{31} = 0$$

Este resultado era esperable, en tanto que el $ECA_3 = -\Delta P_{C3} = 0$ sin necesidad de ninguna actuación del control secundario.



CONTROL DE TENSIONES



El objetivo del control de las tensiones consiste en mantener éstas en todo momento dentro de unos márgenes adecuados que aseguren el correcto funcionamiento de los equipos que constituyen el sistema eléctrico, así como asegurar que se suministran unos niveles de tensión satisfactorios en los puntos de consumo.

A diferencia de lo que ocurre en el control de la frecuencia, donde los mecanismos de control están muy estandarizados, el control de tensiones presenta características muy diversas de un sistema eléctrico a otro, diversidad que es consecuencia de la complejidad del problema y de la variedad de equipos de control utilizados para controlar las tensiones de la red.

En la actualidad, los sistemas de potencia están equipados con una amplia variedad de equipos cuya actuación afecta principalmente a la potencia reactiva y a las tensiones:

- Los *generadores síncronos*, con capacidad para regular la tensión en bornas, y la necesaria generación de potencia reactiva, mediante el control de la intensidad de excitación del rotor.
- *Condensadores síncronos y compensadores estáticos de reactiva*, equipos cuyo objetivo es el aporte o consumo de reactiva para controlar una determinada tensión.
- *Bancos de condensadores y reactancias* utilizados para aportar reactiva, o consumir reactiva en el caso de las reactancias, cuando sea necesario. Son elementos discretos en el sentido de que se conectan elemento a elemento, proporcionando una variable de control en incrementos discretos o, como en el caso de grandes reactancias, una actuación todo/nada.
- *Transformadores con tomas variables en carga* que permiten variar su relación de transformación en forma discreta según el número de espiras de cada toma de regulación. A diferencia de los anteriores, no tienen capacidad para inyectar reactiva en la red, actuando como elementos que modifican los flujos de potencia reactiva en el sistema.

Junto a los anteriores equipos, se pueden utilizar otras actuaciones que afectan a las tensiones pero cuya conveniencia es discutible, como puede ser la apertura de líneas descargadas o el deslastre de cargas.

Tanto la elección del tipo de control a utilizar como las decisiones referentes a su actuación, automática o con intervención humana, están en general condicionadas por el nivel de tensiones del sub-sistema a controlar. Así, mientras que la actuación de los controles de tensión y potencia reactiva tiende

a estar totalmente automatizada en los niveles de distribución, debido principalmente a la necesidad de mantener un perfil de tensiones muy rígido de cara al usuario, son pocas las compañías eléctricas que han implantado un control automático de tensiones en sus redes de transporte, realizándose normalmente mediante telemando por parte de los operadores de los centros de control del sistema eléctrico. Es en los niveles de transporte donde el control de las tensiones y de los flujos de potencia reactiva adquiere, por tanto, mayor relevancia y complejidad.

La complejidad del control de las tensiones y la potencia reactiva en tiempo real obliga, como se ha puesto de manifiesto, a la descomposición geográfica y temporal del problema (Figura 7.1).

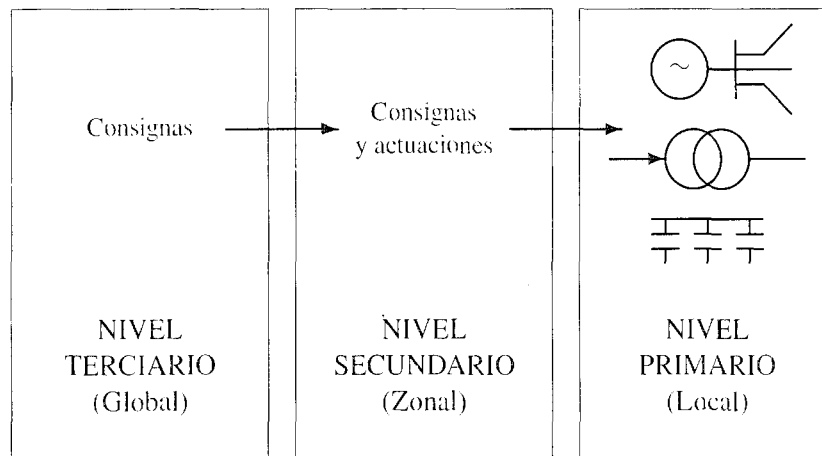


Figura 7.1 Estructura jerárquica del control de tensiones.

El control primario, similar al efectuado por los reguladores de velocidad de los generadores sobre la frecuencia y la potencia activa generada, es realizado por los reguladores automáticos de tensión de los grupos y por los reguladores automáticos de transformadores con tomas bajo carga, y baterías de condensadores y reactancias. Su objetivo es la corrección de las perturbaciones que afectan a las tensiones de los nudos en aras a mantener un adecuado perfil de tensiones ante cambios en las potencias activa y reactiva demandadas.

El control primario se muestra insuficiente para asegurar la estabilidad de las tensiones ante cambios drásticos en el estado del sistema, siendo necesario un segundo nivel de control que coordine la actuación de los distintos controladores primarios, de marcado carácter local, modificando sus consignas y decidiendo otras actuaciones no automatizadas.

El control secundario tiene naturaleza regional, debiendo existir, aunque no siempre se llega a implementar, un control terciario que coordine los distintos controles regionales para satisfacer un criterio global de operación.

Existen en la actualidad dos formas distintas de implementar el control de tensiones en una red eléctrica. Por un lado el control totalmente automatizado llevado a la práctica en Francia e Italia, principalmente. En los sistemas eléctricos de dichos países, las tensiones de determinados nudos de la red, representativos del estado de tensiones de cada zona, se mantienen automáticamente en un valor de consigna mediante la actuación coordinada de los reguladores de tensión de los generadores de la zona (*nivel secundario*). Las tensiones de referencia de los nudos controlados se determinan globalmente sobre la base de criterios de optimalidad y seguridad (*nivel terciario*).

Frente a la anterior solución se encuentra la implementación práctica más extendida, así como la más conservadora, que cierra el bucle de control a través de los operadores de los distintos centros de control

de las compañías eléctricas. El objetivo es el mismo que en el caso anterior: mantener las tensiones entre límites aceptables teniendo en cuenta determinados criterios de optimalidad y seguridad (minimización de pérdidas de transporte, mantenimiento de una adecuada reserva de potencia reactiva, etc.). En este caso, son los operadores de los centros de control los encargados de decidir el tipo, número y magnitud de las actuaciones a implementar según el estado de la red en cada momento, debidamente monitorizado.

Obviamente, la problemática de ambas tendencias, pese a compartir una misma base, difiere en gran medida.

Aunque en sistemas eléctricos de pequeña dimensión es posible trabajar directamente con las relaciones que proporcionan las leyes de Kirchhoff, la determinación de actuaciones de control para mantener las tensiones entre límites se basa en las ecuaciones que ligán la potencia reactiva inyectada en los nudos de la red con las tensiones y las fases de dichos nudos:

$$Q_i = \sum_j V_i V_j (G_{ij} \operatorname{sen} \theta_{ij} - B_{ij} \operatorname{cos} \theta_{ij})$$

Suponiendo que las fases no se ven afectadas por los cambios en los módulos de las tensiones y en las potencias reactivas inyectadas en los nudos (lo cual supone un perfecto desacoplo entre las potencias activa y reactiva), se puede plantear el siguiente modelo incremental:

$$\Delta Q_i = \left[-2B_{ii} V_i + \sum_{j \neq i} V_j (G_{ij} \operatorname{sen} \theta_{ij} - B_{ij} \operatorname{cos} \theta_{ij}) \right] \Delta V_i + \sum_{j \neq i} V_i (G_{ij} \operatorname{sen} \theta_{ij} - B_{ij} \operatorname{cos} \theta_{ij}) \Delta V_j$$

Debe indicarse que las ecuaciones anteriores pueden extenderse al caso de que existan transformadores con tomas de regulación, incluyendo las derivadas pertinentes.

El modelo incremental formulado, en forma matricial y agrupando nudos de generación y consumo, supone las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_g \\ \Delta Q_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{gg} & J_{gc} \\ J_{cg} & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_g \\ \Delta V_c \end{bmatrix}$$

La ecuación anterior proporciona una forma fácil de calcular la magnitud de las actuaciones necesarias para obtener la corrección deseada en los nudos de consumo:

- Inyección de potencia reactiva en nudos de consumo:

$$\Delta V_g = 0 \implies \Delta V_c = J_{cc}^{-1} \Delta Q_c$$

El cambio en la potencia reactiva de los generadores se puede estimar de:

$$\Delta Q_g = J_{gc} \Delta V_c = J_{gc} J_{cc}^{-1} \Delta Q_c$$

- Cambios en las consignas de tensión de generadores:

$$\Delta Q_c = 0 \implies \Delta V_c = -J_{cc}^{-1} J_{cg} \Delta V_g$$

y

$$\Delta Q_g = J_{gg} \Delta V_g + J_{gc} \Delta V_c = \left(J_{gg} - J_{gc} J_{cc}^{-1} J_{cg} \right) \Delta V_g$$

Por otra parte, es posible utilizar expresiones más simples que las proporcionadas por el jacobiano de las ecuaciones de la red utilizando la intensidad reactiva inyectada en los nudos y realizando las aproximaciones habituales en redes de transporte:

$$\Delta I_{ri} = \Delta \left(\frac{Q_i}{V_i} \right) = -B_{ii} \Delta V_i + \sum_{j \neq i} (G_{ij} \operatorname{sen} \theta_{ij} - B_{ij} \operatorname{cos} \theta_{ij}) \Delta V_j \simeq -B_{ii} \Delta V_i + \sum_{j \neq i} -B_{ij} \Delta V_j$$

En forma matricial, agrupando nudos de consumo y generación:

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{r_g} \\ \Delta I_{r_c} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{gg} & B_{gc} \\ B_{gc}^T & B_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_g \\ \Delta V_c \end{bmatrix}$$

donde la matriz B es la parte imaginaria de la matriz de admitancias nodales.

Obviamente, las aproximaciones realizadas implican un mayor error en los cálculos.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 7.1.** La red de la Figura 7.2 debe alimentar una carga inductiva de 20 MW y factor de potencia 0.8 a una tensión de 13.8 kV. Los datos de la línea y los transformadores presentes en la red se indican en la Tabla 7.1.

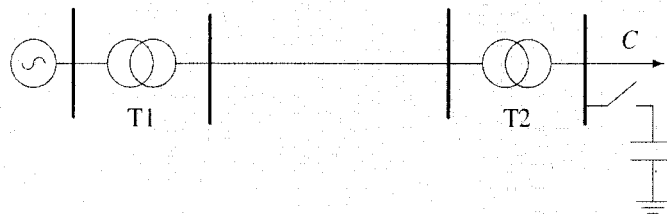


Figura 7.2 Esquema unifilar de la red del Problema 7.1.

Como medio de control de tensiones se dispone del generador, el cual puede suministrar hasta un máximo de 20 Mvar (no puede consumir reactiva), y de una batería de condensadores de $80 \mu\text{F}/\text{fase}$ conectable en el nudo de consumo.

Elemento	Valores característicos
Línea	$Z_L = 20 + 100j \Omega$
T1	$S_N = 40 \text{ MVA}$, 13.2/132 kV, $X_{T1} = 10\%$
T2	$S_N = 30 \text{ MVA}$, 138/13.8 kV, $X_{T2} = 12\%$

Tabla 7.1 Datos de los elementos de la red de la Figura 7.2.

Determinar si será necesario conectar la batería de condensadores y, en cualquier caso, la tensión, en kV, que habrá que mantener en bornas del generador.

Determinar, asimismo, las intensidades en kA que circulan por la línea.

Nota: tomar como potencia base $S_B = 20 \text{ MVA}$.

Resolución

En primer lugar se adoptará un modelo en p.u., optando por la potencia base de 20 MVA que se indica y una tensión base en la zona de la línea $V_{BL} = 138 \text{ kV}$. Con la relación de transformación de los transformadores se definen las tensiones base de las otras dos áreas que se pueden distinguir en la red bajo estudio (Figura 7.3):

$$V_{BG} = \frac{13.2}{132} V_{BL} = 13.8 \text{ kV} \quad V_{BC} = \frac{13.8}{138} V_{BL} = 13.8 \text{ kV}$$

Las impedancias base de cada zona son pues:

$$Z_{BG} = \frac{V_{BG}^2}{S_B} = 9.522 \Omega \quad Z_{BL} = \frac{V_{BL}^2}{S_B} = 952.2 \Omega \quad Z_{BC} = \frac{V_{BC}^2}{S_B} = 9.522 \Omega$$

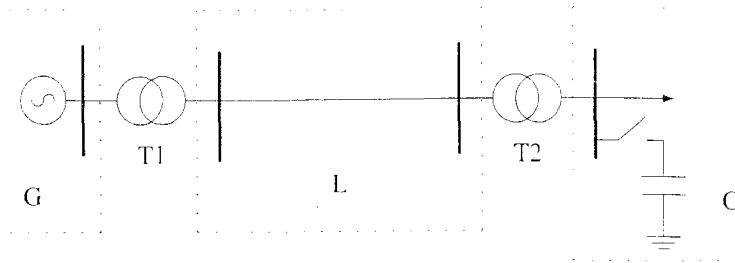


Figura 7.3 Áreas de tensión en la red del Problema 7.1.

y las intensidades base resultan igualmente

$$I_{BG} = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_{BG}} = 0.837 \text{ kA} \quad I_{BL} = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_{BL}} = 0.0837 \text{ kA} \quad I_{BC} = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_{BC}} = 0.837 \text{ kA}$$

Así, se obtienen los datos que modelan la red en p.u.

Las reactancias de cortocircuito de los transformadores:

$$X_{T1} = 0.1 \cdot \frac{20}{V_{BG}^2} \cdot \left(\frac{1}{Z_{BG}}\right)^2 = 0.046 \quad X_{T2} = 0.12 \cdot \frac{15}{V_{BC}^2} \cdot \left(\frac{1}{Z_{BC}}\right)^2 = 0.08$$

la impedancia de la línea

$$Z_L = \frac{20 + 100j}{Z_{BL}} = 0.021 + 0.105j$$

los datos de la carga, potencia y tensión

$$S_C = P_C + jQ_C = \frac{20 + 20 \frac{0.6}{0.8}j}{S_B} = 1 + 0.75j \quad V_C = \frac{13.8}{V_{BC}} = 1$$

y la admitancia de la batería de condensadores

$$Y_{cond} = (C2\pi 50) \cdot Z_{BC} = 0.2393 \text{ p.u.}$$

Con todos los datos ya en p.u., supondremos en primer lugar que la batería de condensadores se encuentra desconectada y calcularemos la tensión en bornas del generador y la reactiva que éste habría de suministrar en este caso.

Tomando como origen de ángulos la tensión en bornas de la carga, se obtiene la intensidad por la línea:

$$J_L = \left(\frac{S_C}{U_C}\right)^* = 1 - 0.75j = 1.25 \angle_{-36.87^\circ} \implies I_L = 0.105 \text{ kA}$$

y con ello la tensión a la salida del generador

$$U_G = (jX_{T1} + Z_L + jX_{T2})J_L + U_C = 1.194 + 0.215j = 1.213 \angle_{10.2^\circ}$$

La potencia compleja suministrada por el generador sería por tanto:

$$S_G = U_G \cdot J_G^* = U_G \cdot J_L^* = 1.033 + 1.111j$$

Pasando a magnitudes reales se obtiene que el generador suministra una reactiva igual a 22.21 Mvar, lo cual supera el límite impuesto de 20 Mvar y obliga a conectar la batería de condensadores.

Con los condensadores conectados y manteniendo la tensión en la carga, la potencia reactiva trifásica suministrada por aquellos vale

$$Q_{cond} = Y_{cond}V_C^2 = 0.2393$$

con lo cual, la potencia total demandada en el embarrado de carga resulta ser:

$$S_{\text{neta}} = S_C - jQ_{\text{cond}} = 1 + 0.511j$$

Con esta nueva demanda de potencia la intensidad por la línea vale:

$$J_L = \left(\frac{S_{\text{neta}}}{U_C} \right)^* = 1 - 0.511j = 1.123 \angle -27.05^\circ$$

Y la tensión a la salida del generador resulta:

$$U_G = (jX_{T1} + Z_L + jX_{T2}) J_L + U_C = 1.139 + 0.22j = 1.16 \angle 10.93^\circ$$

En unidades físicas la tensión a la salida del generador sería de 16 kV, y la potencia compleja suministrada al resto del circuito valdría:

$$S_G = U_G \cdot J_G^* = 1.026 + 0.8j$$

Lo que hacen 20.53 MW y 16.03 Mvar, estando el generador dentro de límites.

7.2. Los datos de la red de la Figura 7.4 se indican en la Tabla 7.2.

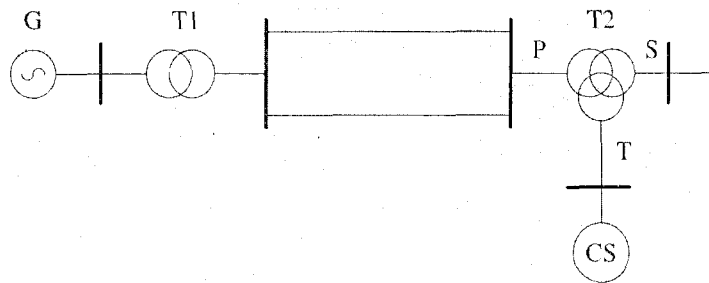


Figura 7.4 Esquema unifilar de la red del Problema 7.2.

Se desea mantener la tensión del nudo de carga (en el lado S del transformador) a 1 p.u. mediante la adecuada inyección de reactiva, debiendo premiarse la inyección de reactiva del condensador síncrono debido a su mayor proximidad al nudo de consumo.

Sabiendo que la tensión máxima admisible en bornas de dicho condensador es de 1.062 p.u., determinar la máxima reactiva que éste podría aportar y la tensión necesaria en bornas del generador en dicho caso.

Elemento	Valores característicos
T1	$S_N = 100 \text{ MVA}$, 24.2/440 kV, $X_{T1} = 10\%$
Línea	$Z_L = 1 + 5j \Omega$ cada una
PS	$S_N = 90 \text{ MVA}$, 400/11 kV, $X_{PS} = 20\%$
T2	PT $S_N = 90 \text{ MVA}$, 400/66 kV, $X_{PT} = 10.5\%$
	ST $S_N = 90 \text{ MVA}$, 11/66 kV, $X_{ST} = 10\%$
Carga	90 MVA, $\cos \varphi = 0.8$ inductivo

Tabla 7.2 Datos de los elementos de la red de la Figura 7.4.

Nota: para los cálculos en p.u. tomar como potencia base $S_B = 100 \text{ MVA}$ y $V_B = 400 \text{ kV}$ en las líneas.

Resolución

Adoptando la base sugerida para este problema, resulta el esquema en p.u. mostrado en la Figura 7.5 siguiendo las mismas consideraciones que las adoptadas en el capítulo dedicado al cálculo en p.u.

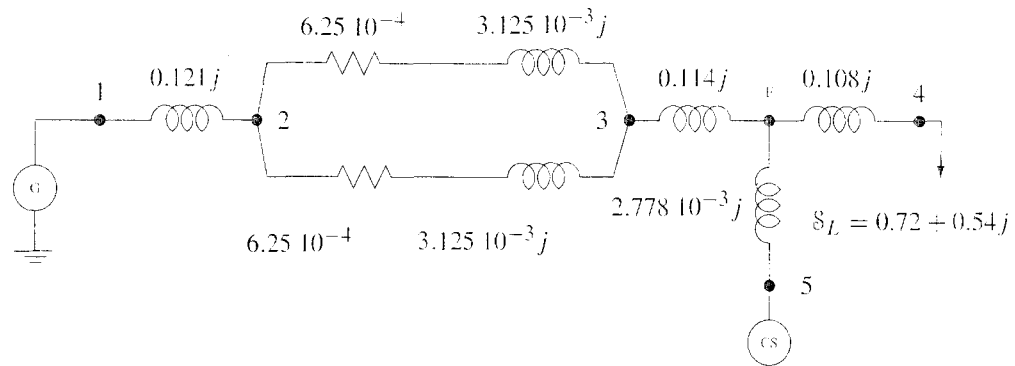


Figura 7.5 Esquema en p.u. para la red del Problema 7.2.

Si se toma como origen de ángulos la tensión en el nudo de carga, $u_4 = 1 \angle 0^\circ$, la intensidad J_L asociada a dicha carga viene dada por:

$$J_L = \left(\frac{S_L}{u_4} \right)^* = 0.72 - 0.54j = 0.9 \angle -36.87^\circ$$

Con esta intensidad es posible determinar la tensión en el nudo ficticio F resultante del modelo adoptado para el transformador de tres devanados:

$$u_F = u_4 + (0.108j)J_L = 1.059 + 0.078j = 1.061 \angle 4.214^\circ$$

Por otro lado, forzando la tensión en bornas del condensador síncrono a su valor máximo, $|u_5| = 1.062$, y teniendo en cuenta que el condensador síncrono ni consume ni cede potencia activa, resulta:

$$P_5 = 0 = \frac{V_F \cdot V_5}{2.778 \cdot 10^{-3}} \sin(\theta_F - \theta_5) = \frac{1.062 \cdot 1.061}{2.778 \cdot 10^{-3}} \sin(4.214 - \theta_5)$$

de donde se obtiene el ángulo asociado a la tensión del nudo 5, $\theta_5 = 4.214^\circ$. Este resultado era de esperar si se observa que entre el nudo ficticio F y el 5 sólo existe una reactancia, junto al hecho de que el condensador síncrono no consume ni cede potencia activa.

Con este resultado es posible determinar la potencia reactiva inyectada por el condensador síncrono:

$$Q_5 = -\frac{V_5}{2.778 \cdot 10^{-3}} [V_F \cos(\theta_F - \theta_5) - V_5] = 0.241$$

Por lo tanto, el condensador síncrono inyecta una potencia reactiva de 24.1 Mvar.

En esta situación la tensión en bornas de generador sería:

$$u_1 = J_g \cdot \left(0.121j + \frac{Z_L}{2} + 0.114j \right) + u_F$$

donde Z_L corresponde a la impedancia de una de las líneas, y J_g se determina previamente a partir de la ecuación resultante de aplicar la primera ley de Kirchhoff en el nudo ficticio F, esto es:

$$J_g = J_L - \frac{(u_5 - u_F)}{2.778 \cdot 10^{-3}j} = 0.703 - 0.314j = 0.77 \angle -24.04^\circ$$

De esta forma resulta una tensión en bornas del generador de valor $u_g = 1.16 \angle 12.16^\circ$, que en valores de ingeniería correspondería a 25.5 kV.

- 7.3.** Un generador alimenta a una carga de 80 MW y 25 Mvar a través del sistema de la Figura 7.6, actuando el motor síncrono localizado en la subestación S como apoyo de potencia reactiva en la red. Los datos asociados a cada elemento se detallan en la Tabla 7.3.

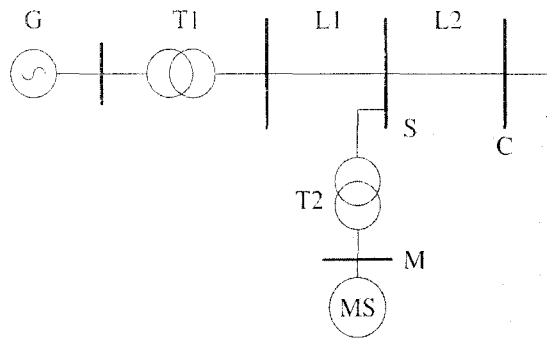


Figura 7.6 Esquema unifilar de la red del Problema 7.3.

Trabajando en por unidad ($S_B = 100$ MVA), resolver las siguientes cuestiones:

1. Si el motor síncrono se encuentra trabajando en vacío y no inyecta ni consume potencia reactiva alguna, determinar la tensión en bornas del generador y la potencia reactiva suministrada por el mismo para conseguir una tensión de 1 en p.u. en el nudo de carga.
2. Calcular la reactiva que debiera inyectar el motor síncrono para mantener la tensión del nudo de carga a su valor nominal y que el generador sólo suministre potencia activa.
3. Repetir el apartado anterior si el motor síncrono y el transformador asociado se localizaran en el nudo de carga.

Elemento	Valores característicos
Generador	$S_N = 150$ MVA, 13 kV
T1	$S_N = 200$ MVA, 13/132 kV, $X_{T1} = 0.1$ p.u.
T2	$S_N = 100$ MVA, 132/20 kV, $X_{T2} = 0.08$ p.u.
L1	150 km, $X = 0.35 \Omega/\text{km}$
L2	150 km, $X = 0.35 \Omega/\text{km}$
Motor síncrono	100 MVA, 20 kV

Tabla 7.3 Datos de los elementos de la red de la Figura 7.6.

Resolución

Si se toma como potencia base 100 MVA y como tensiones base 13 kV en la zona del generador, 132 kV en la línea y en la carga, y 20 kV en el motor síncrono, resulta el esquema y los valores en p.u. que se muestran en la Figura 7.7.

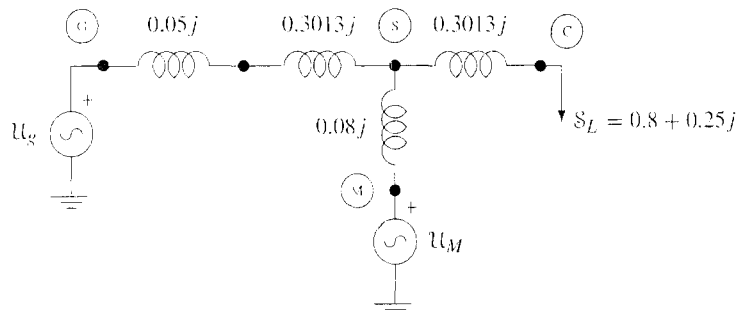


Figura 7.7 Esquema en p.u. de la red del Problema 7.3.

Primera cuestión: las condiciones a imponer en este apartado son:

- Tensión unitaria en el nudo de carga, es decir, $u_C = 1 \angle 0^\circ$ tomando como referencia de ángulos la tensión en dicho nudo.

- Potencia activa y reactiva nulas para el motor síncrono, es decir, por la rama que parte del motor no circula intensidad alguna, $J_M = 0$.

Las condiciones anteriores permiten aplicar la siguiente ecuación:

$$U_G = U_C + J_G \cdot Z_{eq}$$

donde $Z_{eq} = 0.6526j$ y

$$J_G = J_C = \left(\frac{S_C}{U_C} \right)^* = \frac{0.8 - 0.25j}{1} = 0.8 - 0.25j = 0.8381 \angle -17.35^\circ$$

De esta forma, la tensión resultante en bornas del generador es $U_G = 1.275 \angle 24.17^\circ$, es decir, 16.57 kV.

La potencia suministrada en bornas del generador vale:

$$S_G = 0.8 + 0.71j \implies 71 \text{ Mvar}$$

Segunda cuestión: las magnitudes impuestas en este caso son:

- Tensión unitaria en el nudo de carga, $U_C = 1 \angle 0^\circ$.
- Potencia activa cero para el motor síncrono, es decir, $P_M = 0$.
- La potencia reactiva suministrada por el generador es cero, $Q_G = 0$.

En esta situación es posible plantear el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$U_S = U_C + J_C \cdot 0.3013j$$

donde

$$J_C = \left(\frac{S_C}{U_C} \right)^* = 0.8 - 0.25j = 0.8381 \angle -17.35^\circ$$

Resulta por tanto $U_S = 1.075 + 0.241j = 1.102 \angle 12.63^\circ$.

Con esta tensión, y teniendo en cuenta que se conocen las potencias activas y reactivas inyectadas por el generador (80 MW y 0 Mvar respectivamente) resulta el siguiente par de ecuaciones:

$$P_G = -0.8 = \frac{V_G \cdot V_S}{X_{GS}} \sin(\theta_S - \theta_G) = \frac{1.102 V_G}{0.3513} \sin(12.63 - \theta_G)$$

$$Q_G = 0 = \frac{V_G \cdot V_S}{X_{GS}} \cos(\theta_S - \theta_G) - \frac{V_G^2}{X_{GS}} = \frac{1.102 V_G}{0.3513} \cos(12.63 - \theta_G) - \frac{V_G^2}{0.3513}$$

Resolviendo se obtiene la tensión en bornas del generador: $U_G = 1.07 \angle 26.42^\circ$.

Conocidas las tensiones, se pueden determinar las siguientes intensidades:

$$J_G = \frac{(U_G - U_S)}{jX_{GS}} = 0.669 + 0.333j = 0.747 \angle -26.42^\circ$$

$$J_M = J_C - J_G = 0.131 - 0.583j = 0.597 \angle -77.36^\circ$$

De esta forma se determina la tensión en bornas del motor síncrono:

$$U_M = U_S + J_M 0.08j = 1.15 \angle 12.63^\circ$$

y con ello la potencia reactiva suministrada por el mismo

$$S_M = U_M J_M^* = 0.687j \implies 68.7 \text{ Mvar}$$

Cabe resaltar que la reactiva suministrada por el motor resulta menor que la que debía inyectar el generador (71 Mvar), cuando este último era el único apoyo de reactiva en la red. La razón de esta disminución se encuentra en la posición más cercana del motor síncrono con respecto a la carga, lo que

implica una intensidad menor por el primer tramo de línea y por lo tanto un menor consumo de reactiva en la red.

Tercera cuestión: si se traslada el motor síncrono y el transformador correspondiente al punto de consumo, el esquema unifilar resultante se representa en la Figura 7.8.

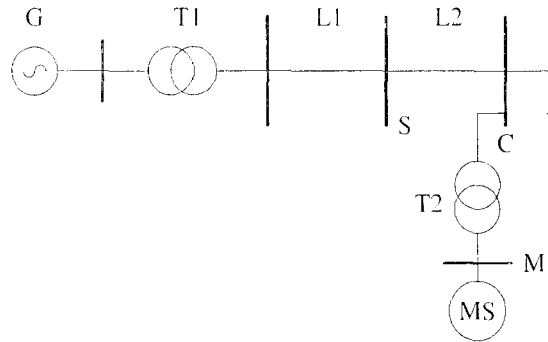


Figura 7.8 Esquema unifilar para el Apartado 3 de la red del Problema 7.3.

Las condiciones de tensión y potencia en este caso proporcionan las siguientes ecuaciones para el generador:

$$P_G = -0.8 = \frac{V_G \cdot V_C}{X_{GC}} \cdot \text{sen}(\theta_C - \theta_G) = \frac{1.0 V_G}{0.65262} \cdot \text{sen}(0 - \theta_G)$$

$$Q_G = 0 = \frac{V_G \cdot V_C}{X_{GC}} \cdot \text{cos}(\theta_C - \theta_G) - \frac{V_G^2}{X_{GC}} = \frac{1.0 V_G}{0.65262} \cdot \text{cos}(0 - \theta_G) - \frac{V_G^2}{0.65262}$$

Dicho sistema de ecuaciones no tiene solución, indicando que no es factible trabajar con el generador suministrando una potencia reactiva nula.

Suponiendo, como solución de compromiso, que el motor síncrono trabaja proporcionando la mitad de su potencia nominal (50 Mvar),

$$P_M = 0.0 = \frac{V_M \cdot V_C}{X_{MC}} \cdot \text{sen}(\theta_M - \theta_C) = \frac{1.0 V_M}{0.08} \cdot \text{sen}(\theta_M - 0)$$

$$-Q_M = -0.5 = \frac{V_M \cdot V_C}{X_{MC}} \cdot \text{cos}(\theta_C - \theta_M) - \frac{V_M^2}{X_{MC}} = \frac{1.0 V_M}{0.08} \cdot \text{cos}(0 - \theta_M) - \frac{V_M^2}{0.08}$$

Ecuaciones que proporcionan las condiciones en el motor, $\theta_M = 1.0385 [0^\circ]$. La reactiva que el motor síncrono inyecta en el nudo de consumo es, por tanto,

$$Q_{MC} = \frac{V_M \cdot V_C}{X_{MC}} \cdot \text{cos}(\theta_M - \theta_C) - \frac{V_C^2}{X_{MC}} = \frac{1.0385}{0.08} - \frac{1}{0.08} = 0.4815$$

de los cuales parten hacia el nudo de generación $0.4815 - 0.25 = 0.2315$. Las condiciones en el generador se obtienen de las siguientes ecuaciones:

$$-P_G = -0.8 = \frac{V_G \cdot V_C}{X_{GC}} \cdot \text{sen}(\theta_C - \theta_G) = \frac{1.0 V_G}{0.65262} \cdot \text{sen}(0 - \theta_G)$$

$$Q_{GC} = -0.2315 = \frac{V_G \cdot V_C}{X_{GC}} \cdot \text{cos}(\theta_G - \theta_C) - \frac{V_G^2}{X_{GC}} = \frac{1.0 V_G}{0.65262} \cdot \text{cos}(\theta_G - 0) - \frac{1}{0.65262}$$

Ecuaciones que proporcionan $\theta_G = 0.997 [31.59^\circ]$ y la reactiva que debe suministrar el generador:

$$-Q_G = \frac{V_G \cdot V_C}{X_{GC}} \cdot \text{cos}(\theta_C - \theta_G) - \frac{V_G^2}{X_{GC}} = -0.221$$

Es decir, el generador debe proporcionar 22 Mvar cuando el motor síncrono aporta 50 Mvar.

7.4. El generador de la figura alimenta a una carga de 150 MW y factor de potencia unidad a través de un transformador de 3 devanados y 2 líneas en paralelo. En el terciario del transformador se ha previsto la conexión de una reactancia de $5.175 \Omega/\text{fase}$ para compensar la capacidad de las líneas en situaciones de poca demanda. El esquema unifilar se muestra en la Figura 7.9, y los datos asociados a cada elemento se detallan en la Tabla 7.4.

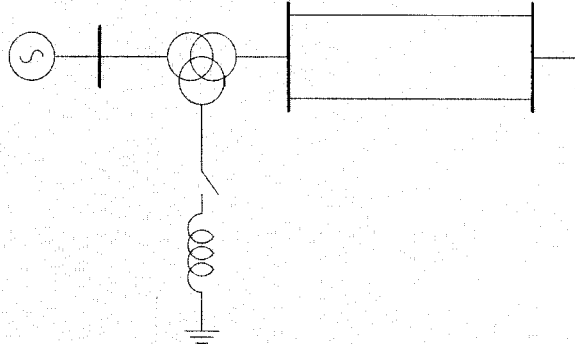


Figura 7.9 Esquema unifilar de la red del Problema 7.4.

Trabajando en p.u. ($S_B = 100 \text{ MVA}$) y sabiendo que la tensión del generador puede variar entre 9.9 y 12.1 kV, determinar si será necesario conectar la reactancia para mantener la tensión del nudo de consumo a 400 kV en las condiciones de demanda indicadas.

Elemento	Valores característicos
Línea L1	100 km, $X = 0.37 \Omega/\text{km}$, $Y = 11 \mu\text{S}/\text{km}$
Línea L2	100 km, $X = 0.37 \Omega/\text{km}$, $Y = 11 \mu\text{S}/\text{km}$
PS	$S_N = 160 \text{ MVA}$, 400/11 kV, $X_{PS} = 20\%$
T PT	$S_N = 160 \text{ MVA}$, 400/66 kV, $X_{PT} = 10.5\%$
ST	$S_N = 160 \text{ MVA}$, 11/66 kV, $X_{ST} = 10\%$

Tabla 7.4 Datos de los elementos de la red de la Figura 7.9.

Resolución

Si se toma como potencia base 100 MVA y como tensiones base 11 kV en la zona del generador, 400 kV en la línea, y 66 kV en el lado de la reactancia, resulta el esquema y los valores en p.u. que se muestran en la Figura 7.10, habiéndose adoptado para las líneas su modelo en π . Las capacidades a tierra tienen todas el mismo valor.

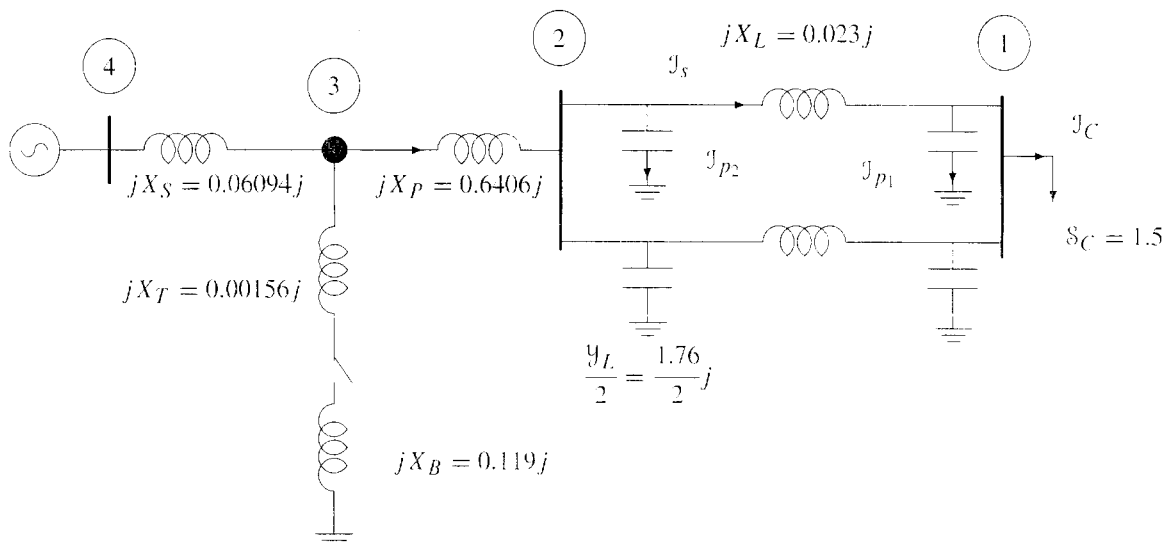


Figura 7.10 Esquema en p.u. de la red del Problema 7.4.

Siguiendo la notación indicada en la Figura 7.10, se determina en primer lugar la tensión en bornas de la carga cuando el terciario del transformador se encuentra abierto. La intensidad demandada en el nudo de carga, suponiendo en éste tensión nominal y tomando origen de ángulos, vale:

$$J_C = \left(\frac{S_C}{U_1} \right)^* = \left(\frac{1.5}{1 \angle 0^\circ} \right)^* = 1.5$$

Como las líneas en paralelo son exactamente iguales, la intensidad de carga se reparte por igual entre ambas. Con ésta, y la intensidad por la capacidad del extremo 1 de la línea

$$J_{p1} = \frac{Y_L}{2} \cdot U_1 = 0.88j$$

se deduce la intensidad por la impedancia serie de cada línea

$$J_s = \frac{J_C}{2} + J_{p1} = 0.75 + 0.88j = 1.156 \angle 49.56^\circ$$

Con esta intensidad se determina la tensión en 2:

$$U_2 = U_1 + J_s j X_L = 0.98 + 0.017j = 0.9798 \angle 1.014^\circ$$

Con esta tensión se obtiene a su vez la intensidad por el condensador del extremo 2 de una de las líneas:

$$J_{p2} = \frac{Y_L}{2} \cdot U_2 = -0.015 + 0.862j = 0.862 \angle 91.01^\circ$$

Así, la intensidad que circula por el primario del transformador, la cual coincide con la que proporciona el generador, vale:

$$J_P = J_G = 2(J_s + J_{p2}) = 1.469 + 3.484j = 3.781 \angle 67.13^\circ$$

Teniendo en cuenta que el devanado terciario del transformador está abierto, la tensión en bornas del generador resulta:

$$U_4 = U_2 + J_G (X_S + X_P)j = 0.544 + 0.201j = 0.58 \angle 20.28^\circ$$

La tensión queda bastante lejana de los límites de explotación marcados (tensión mínima de 0.9 y máxima de 1.1), y el generador tiene que absorber una reactiva muy elevada ($Q_G = -160$ Mvar). Obviamente, tal situación sería insostenible en la práctica.

Este valor tan bajo de tensión con respecto a la nominal del nudo de carga, se justifica debido al efecto Ferranti provocado por las capacidades de las líneas a tierra.

Al conectar la reactancia del transformador, las intensidades obtenidas anteriormente siguen siendo válidas. Con J_P se calcula la tensión en el nudo 3:

$$U_3 = U_2 + J_P (j X_P) = 0.756 + 0.111j = 0.765 \angle 8.38^\circ$$

y con esta tensión, la intensidad por la reactancia conectada

$$J_B = \frac{1}{(j X_T + j X_B)} \cdot U_3 = 6.352 \angle -81.61^\circ$$

Finalmente la nueva tensión en bornas del generador vale:

$$U_4 = U_3 + (J_T + J_B) \cdot j X_S = 0.9271 + 0.2575j = 0.962 \angle 15.52^\circ$$

que se encuentra ahora entre los límites permitidos.

Compruebe el lector que el transformador trabajaría sobrecargado debido a las potencias reactivas de la reactancia y del generador.

7.5. En la red radial de la Figura 7.11, un nudo de potencia infinita de 400 kV alimenta a otro embarrado donde se consumen 900 MW y 140 Mvar a 132 kV, a través de una línea y un transformador en serie con una impedancia conjunta de $7 + 70j \Omega$. El transformador posee tomas de regulación que permiten variar su relación de transformación t un $\pm 10\%$ alrededor de su valor nominal para controlar la tensión del nudo de carga.

Se desea conectar un compensador síncrono en la barra de carga. ¿Cuál debe ser la potencia de ese compensador para que la caída de tensión en la carga no sea superior al 10% cuando el transformador ha llegado a su límite en la toma?

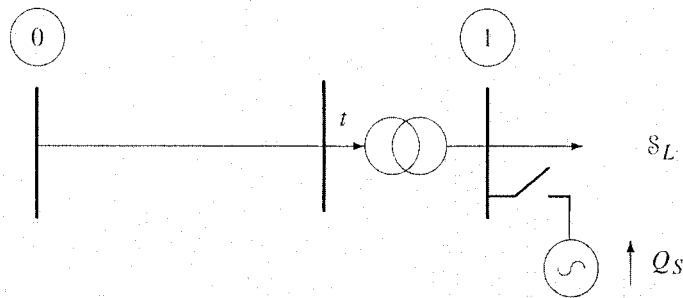


Figura 7.11 Esquema unifilar de la red del Problema 7.5.

Resolución

Utilizando como potencia y tensiones base para el análisis en p.u. 100 MVA, 400 y 132 kV respectivamente, el circuito monofásico equivalente del sistema bajo análisis, tras pasar la impedancia de línea y el embarrado de potencia infinita al secundario del transformador, es el mostrado en la Figura 7.12.

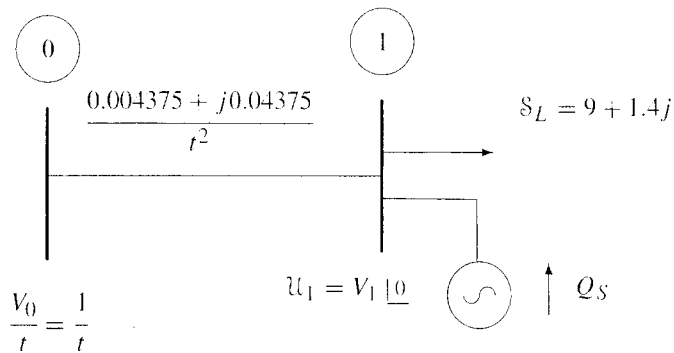


Figura 7.12 Monofásico equivalente para el Problema 7.5.

Puesto que el transformador controla el nudo de carga y se sabe que éste ha alcanzado su límite en la toma buscando reducir la caída de tensión en la línea, se deduce que dicho límite es de $t = 0.9$. Con este valor para la toma se plantea la ecuación:

$$\frac{1}{t} = \left| \frac{z}{t^2} \cdot J + u_1 \right|$$

siendo

$$J = \left(\frac{S_L - Q_S j}{u_1} \right)^*$$

En esta ecuación la única incógnita es la reactiva inyectada por el compensador síncrono, fijándose la tensión del nudo 1 a la máxima caída de tensión permitida, esto es, $V_1 = 0.9$. Este valor se deduce de considerar que, puesto que con la toma del transformador no se ha logrado mantener el límite de máxima

caída de tensión (10%), se trata de ver la reactiva mínima a inyectar en el lado de carga para retomar esa limitación de caída en la línea.

Tomando el origen de ángulos en el embarrado de carga resulta:

$$\frac{1}{0.9} = \left| 0.9 + \frac{Z}{0.9^2} \left(\frac{S - jQ_S}{0.9} \right)^* \right|$$

De esta ecuación se deduce la reactiva mínima a inyectar, $Q_S = 110.036$ Mvar.

7.6. En el esquema de la Figura 7.13 se supone que el embarrado 0 es de potencia infinita, y los datos de los elementos que constituyen el resto del sistema se indican en la Tabla 7.5.

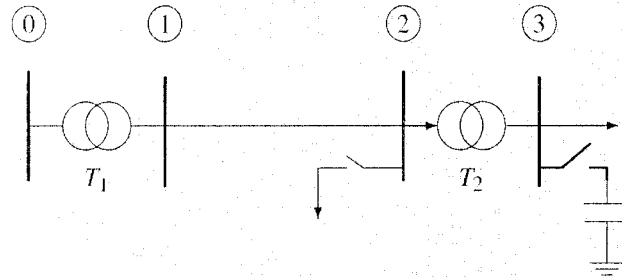


Figura 7.13 Esquema unifilar de la red del Problema 7.6.

Trabajando en p.u. ($S_B = 100$ MVA) resolver las siguientes cuestiones:

1. Si se mantiene la toma del transformador T2 a su valor nominal, determinar:
 - a) Reactiva que ha de inyectar el condensador en 3 para mantener la tensión de dicho nudo a su valor nominal, con la carga en 2 desconectada.
 - b) Tensiones de los nudos 2 y 3 tras conectar la carga existente en el embarrado 2, con el condensador calculado en el apartado anterior conectado.
2. Calcular la relación de transformación del transformador T2 para mantener la tensión en 3 a su valor nominal, con el condensador calculado en el apartado anterior conectado. La relación de transformación puede variar entre un $\pm 10\%$ de su valor nominal.

Elemento	Valores característicos
T1	$S_N = 35$ MVA, 11/66 kV, $X_{T1} = 14\%$
Línea	$X_L = 17.424 \Omega/\text{fase}$
T2	$S_N = 25$ MVA, 66/20 kV, $X_{T2} = 10\%$
Carga en 2	15 MW, $\cos \varphi = 0.8$ inductivo
Carga en 3	18.75 MVA, $\cos \varphi = 0.8$ inductivo

Tabla 7.5 Datos de los elementos de la red de la Figura 7.13.

Resolución

Primera cuestión: si se toma como potencia base 100 MVA y como tensiones base 11 kV en la zona del nudo de potencia infinita, 66 kV en la línea, y 20 kV en el nudo 3, resulta el esquema y los valores en p.u. que se muestran en la Figura 7.14. En este esquema se muestra la situación de partida, con el transformador T2 en su toma nominal y conectada la carga y el condensador existentes en 3.

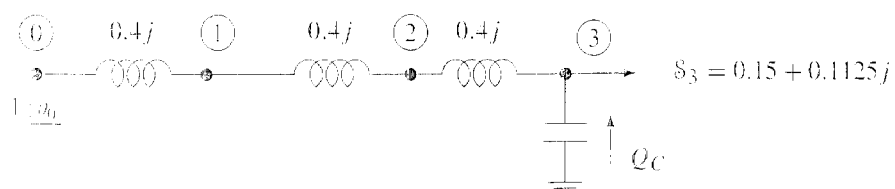


Figura 7.14 Esquema en p.u. para la red de partida del Problema 7.6.

Forzando las tensiones nominales en los nudos 0 y 3 y tomando el origen de ángulos en este último, se plantean las siguientes ecuaciones de flujo:

$$P_3 = \frac{V_0 V_3}{X} \cdot \text{sen}(\theta_0 - \theta_3) = \frac{1}{1.2} \cdot \text{sen}(\theta_0 - 0) = 0.15$$

$$Q_3 - Q_C = \frac{V_0 V_3}{X} \cdot \text{cos}(\theta_0 - \theta_3) - \frac{V_3^2}{X} = \frac{1}{1.2} \cdot \text{cos}(\theta_0 - 0) - \frac{1}{1.2} = 0.1125 - Q_C$$

De este sistema se obtiene $\theta_0 = 0.181$ radianes y $Q_C = 0.1261$. Así, la reactiva a inyectar por el condensador para mantener la tensión del embarrado 3 a su valor nominal es de 12.61 Mvar.

Si se conecta además la carga en el nudo 2, y suponiendo que la reactiva del condensador no varía respecto a la calculada en el apartado anterior, el esquema eléctrico resultante es el que se indica en la Figura 7.15.

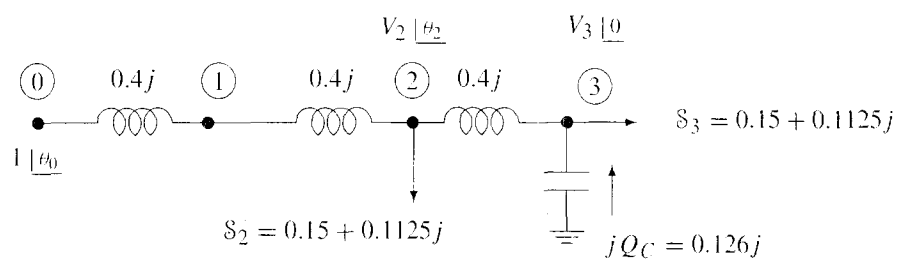


Figura 7.15 Esquema en p.u. del Problema 7.6 con la carga en el nudo 2 conectada.

Las ecuaciones correspondientes al nuevo esquema eléctrico, tomando el origen de ángulos en 3, son:

$$V_2 \angle \theta_2 = jX_{T2} \left(\frac{S_3 - jQ_C}{V_3 \angle 0} \right)^* + V_3 \angle 0$$

$$1 \angle \theta_0 = j(X_{T1} + X_L) \left[\left(\frac{S_3 - jQ_C}{V_3 \angle 0} \right)^* + \left(\frac{S_2}{V_2 \angle \theta_2} \right)^* \right] + V_2 \angle \theta_2$$

Sustituyendo datos, $S_3 - jQ_C = 0.15 - 0.014j$, $S_2 = 0.15 + 0.112j$ y $V_0 = 1$ se obtienen el resto de las incógnitas:

$$\theta_0 = 0.362 \text{ rad.} \quad \theta_2 = 0.084 \text{ rad.} \quad V_2 = 0.844 \text{ p.u.} \quad V_3 = 0.848 \text{ p.u.}$$

Segunda cuestión: como se observa de los resultados anteriores, las tensiones en los nudos 2 y 3 son bastante bajas. Se acude entonces al último elemento disponible para la regulación de tensión, esto es, las tomas del transformador T2.

El esquema unifilar asociado, suponiendo que la reactancia del transformador está referida al secundario, se muestra en la Figura 7.16.

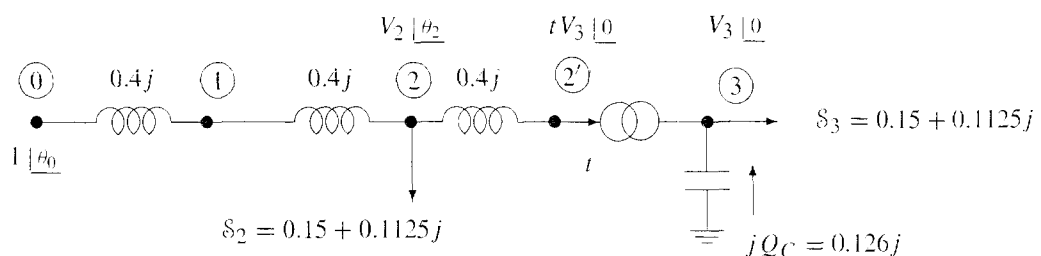


Figura 7.16 Esquema en p.u. del Problema 7.6 considerando las tomas de regulación del transformador.

Planteando las ecuaciones pertinentes para dicho esquema se tiene:

$$V_2 \angle \theta_2 = X_{T2} j \left(\frac{S_3 - Q_C j}{t V_3 \angle \theta} \right)^* + t V_3 \angle \theta$$

$$1 \angle \theta_0 = j(X_{T1} + X_L) \left[\left(\frac{S_3 - j Q_C}{t V_3 \angle \theta} \right)^* + \left(\frac{S_2}{V_2 \angle \theta_2} \right)^* \right] + V_2 \angle \theta_2$$

Sustituyendo datos, $S_3 - j Q_C = 0.15 - 0.014j$, $S_2 = 0.15 + 0.112j$ y $V_0 = 1$, e imponiendo tensión nominal en el nudo 3, $V_3 = 1$, se obtienen las incógnitas:

$$\theta_0 = 0.362 \text{ rad.} \quad \theta_2 = 0.084 \text{ rad.} \quad V_2 = 0.844 \text{ p.u.} \quad t = 0.848 \text{ p.u.}$$

Como era de esperar en una red radial, la relación de transformación del transformador coincide con la tensión del nudo que se desea controlar. Sin embargo, este valor de la toma es inferior al mínimo permitido de 0.9. Fijando por tanto la toma a este valor y liberando de nuevo la tensión en el nudo 3, de las mismas ecuaciones anteriores se obtiene $V_3 = 0.942$.

Por tanto, la máxima tensión que se puede alcanzar en 3, con los elementos de regulación disponibles, es de 0.942 en p.u.

Conviene indicar que puede haber cierto error en este último caso analizado al considerar la reactiva suministrada por el condensador constante (la obtenida en el segundo apartado del problema), cuando existe una dependencia de la misma en función de la tensión en bornas de la batería de condensadores. Un análisis más exacto hubiera consistido en modelar el condensador mediante una admitancia constante.

7.7. En el sistema de la Figura 7.17, cuyos datos están expresados en p.u. respecto a una base de 100 MVA y 400 kV, la tensión del nudo de consumo se mantiene entre 0.95 y 1.05 p.u. mediante el adecuado control de las consignas de tensión de los dos generadores. Determinar las consignas de tensión a aplicar en las siguientes situaciones:

1. En la situación de punta de demanda presentada en la Figura 7.18.
2. En la situación de valle representada en la Figura 7.20, en la que el generador 2 no está disponible, suministrando toda la potencia el generador que queda en servicio.

Las tensiones de los generadores pueden variar entre 0.94 y 1.06 p.u. cuando éstos están en servicio, aplicándose los límites para nudos de consumo cuando un generador no está disponible.

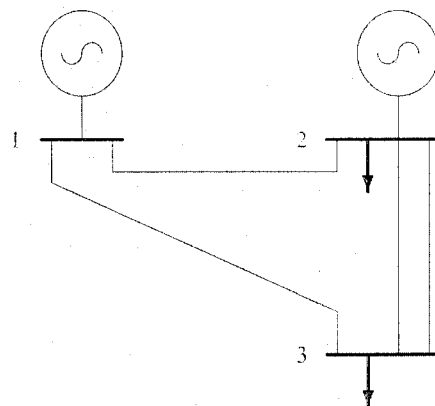


Figura 7.17 Datos de la red de 3 nudos del Problema 7.7.

Lineas						
i	j	Circuito	R	X	B	S _{MAX} (MVA)
1	2	1	0.006	0.06	1.8	1000
1	3	1	0.006	0.06	1.8	1000
2	3	1	0.003	0.03	0.8	1500
2	3	2	0.003	0.03	0.8	1500

Tabla 7.6

Resolución

Situación de punta de demanda. En la situación mostrada en la Figura 7.18, correspondiente a la punta de demanda, la tensión del nudo 3 es excesivamente baja, debiendo corregirse actuando sobre los generadores.

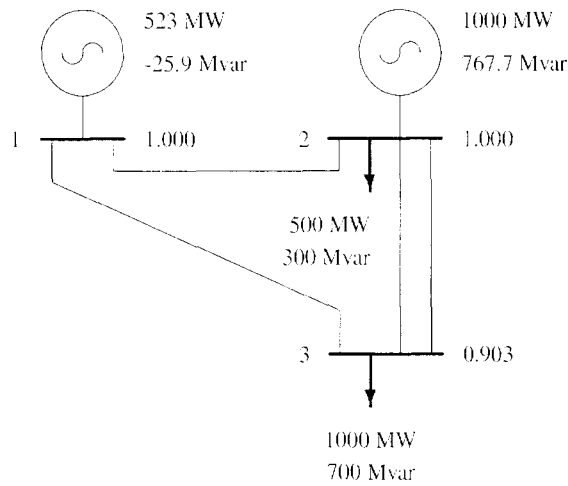


Figura 7.18 Red de 3 nudos del Problema 7.7 en punta de demanda.

Nudos						
i	V_i	θ_i	P_D	Q_D	P_G	Q_G
	p.u.	Grados	MW	Mvar	MW	Mvar
1	1.000	0.0			523	-25.9
2	1.000	-6.4	500	300	1000	767.7
3	0.903	-12.3	1000	700		

Tabla 7.7 Estado de la red en punta de demanda.

La matriz de admitancias nodales resulta:

$$Y_n = \begin{bmatrix} 3.3003 - 31.2033j & -1.6502 + 16.5017j & -1.6502 + 16.5017j \\ -1.6502 + 16.5017j & 8.2508 - 80.8083j & -6.6007 + 66.0066j \\ -1.6502 + 16.5017j & -6.6007 + 66.0066j & 8.2508 - 80.8083j \end{bmatrix}$$

Adoptando un modelo lineal aproximado para los cambios en las tensiones en función de la potencia reactiva, y agrupando los nudos de generación, se tiene:

$$\Delta Q = \begin{bmatrix} B_{gg} & B_{gc} \\ B_{gc}^T & B_{cc} \end{bmatrix} \cdot \Delta V$$

donde la matriz B es la parte imaginaria de Y_n cambiada de signo.

Para la red de 3 nudos resulta:

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31.2033 & -16.5017 & -16.5017 \\ -16.5017 & 80.8083 & -66.0066 \\ -16.5017 & -66.0066 & 80.8083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}$$

Como $\Delta Q_3 = 0$, se tiene que

$$\Delta V_3 = -B_{cc}^{-1} B_{gc}^T = \begin{bmatrix} 0.2042 & 0.8168 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix}$$

ecuación con la que es posible calcular los incrementos necesarios en las consignas de los generadores para llevar la tensión del nudo 3 por encima de 0.95 p.u. ($\Delta V_3 = 0.0468$).

Los cambios en la potencia reactiva de los generadores se obtienen de:

$$\Delta Q = B_{gg} \Delta V_g + B_{gc} \Delta V_c$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31.2033 & -16.5017 \\ -16.5017 & 80.8083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16.5017 \\ -66.0066 \end{bmatrix} \Delta V_3$$

En este ejemplo concreto, es posible actuar sobre un único generador o sobre ambos simultáneamente para corregir la tensión del nudo 3:

- Actuando sobre el primer generador únicamente:

$$\Delta V_1 = \Delta V_3 / 0.2042 = 0.2292; \quad \Delta V_2 = 0$$

Actuación claramente inviable pues implicaría un incremento de un 23% en la tensión de consigna del generador.

- Actuando sobre el segundo generador únicamente:

$$\Delta V_2 = \Delta V_3 / 0.8168 = 0.0573; \quad \Delta V_1 = 0$$

Actuación que conllevaría un incremento aproximado de las potencias reactivas en los generadores de -172 y 154 Mvar respectivamente.

- Actuando sobre ambos generadores según un criterio de reparto, por ejemplo, en proporción a las "sensibilidades" de la tensión a corregir respecto a las variables de control:

$$0.2042 \Delta V_1 + 0.8168 \Delta V_2 = \Delta V_3; \quad \Delta V_1 / 0.2042 = \Delta V_2 / 0.8168$$

sistema de ecuaciones que proporciona $\Delta V_1 = 0.0135$ y $\Delta V_2 = 0.0539$. Los incrementos en la reactiva de los generadores resultan en este caso -124 y 105 Mvar respectivamente.

Obviamente, existen otras posibilidades para determinar las actuaciones, como puede ser la consideración del margen de actuación tanto en términos de consigna de tensión como de límites de reactiva de los generadores.

El cálculo de actuaciones basado en una linealización del problema implica evidentemente errores en las predicciones realizadas. Una forma de reducir dichos errores consiste en trabajar con expresiones más exactas basadas en el jacobiano de las ecuaciones del sistema eléctrico:

$$\Delta Q_i = \left[-2B_{ii} V_i + \sum_{j \neq i} V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \right] \Delta V_i + \sum_{j \neq i} V_i (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \Delta V_j$$

En forma matricial, agrupando nudos de generación y consumo:

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{gg} & J_{gc} \\ J_{cg} & J_{cc} \end{bmatrix} \Delta V = \begin{bmatrix} 30.9452 & -16.5828 & -16.4732 \\ -16.2145 & 85.488 & -66.3353 \\ -14.2416 & -58.682 & 65.2329 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\Delta Q_3 = 0 \implies \Delta V_3 = \begin{bmatrix} 0.2183 & 0.8996 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.9452 & -16.5828 \\ -16.2145 & 85.4880 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16.4732 \\ -66.3353 \end{bmatrix} \Delta V_3$$

Actuando sobre ambos generadores en proporción a la sensibilidad de cada generador:

$$0.2183 \Delta V_1 + 0.8996 \Delta V_2 = \Delta V_3; \quad \Delta V_1 / 0.2183 = \Delta V_2 / 0.8996$$

sistema que proporciona incrementos $\Delta V_1 = 0.0119$ y $\Delta V_2 = 0.0491$ para las tensiones de consigna, y -122 y 90 Mvar en la reactiva de los generadores.

La Figura 7.19 presenta, a modo de comparación, el estado real que se obtendría con las actuaciones calculadas por los dos métodos, mostrándose entre paréntesis los valores proporcionados por la aproximación lineal en cada caso. Puede observarse cómo la aproximación basada en el jacobiano proporciona valores más próximos a los reales, como cabía esperar.

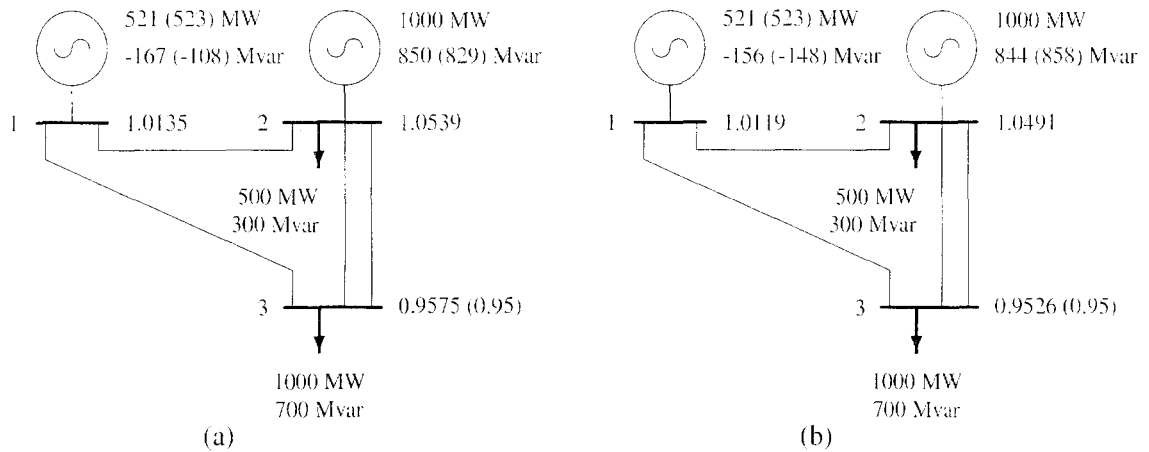


Figura 7.19 Red de 3 nudos del Problema 7.7 tras las actuaciones obtenidas con la matriz B , caso (a), y con el jacobiano, caso (b).

Situación de valle. En este caso, la situación mostrada en la Figura 7.20 presenta una tensión muy elevada en el nudo 3, debiendo actuarse en consecuencia.

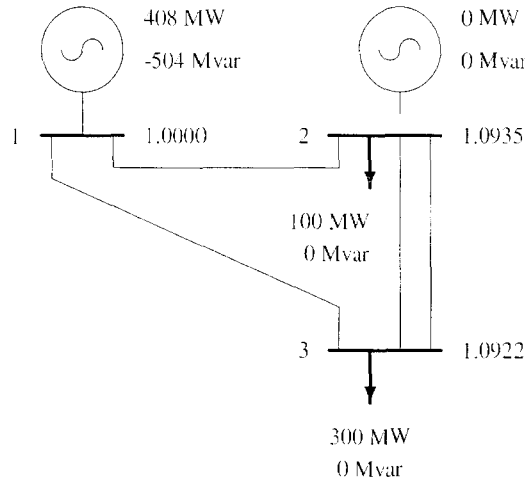


Figura 7.20 Red de 3 nudos del Problema 7.7 en situación de valle.

Nudos						
i	V_i	θ_i	P_D	Q_D	P_G	Q_G
	p.u.	Grados	MW	Mvar	MW	Mvar
1	1.000	0.0			408	-504
2	1.094	-6.6	100	0	0	0
3	1.092	-7.3	300	0		

Tabla 7.8 Estado de la red en situación de valle.

Adoptando la aproximación lineal basada en la matriz de admitancias nodales, y teniendo en cuenta que el generador 2 está desconectado y que está sujeto por tanto a los límites de nudos de consumo, se

tiene:

$$\Delta Q = \begin{bmatrix} B_{gg} & B_{gc} \\ B_{gc}^T & B_{cc} \end{bmatrix} \cdot \Delta V$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31.2033 & -16.5017 & -16.5017 \\ -16.5017 & 80.8083 & -66.0066 \\ -16.5017 & -66.0066 & 80.8083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}$$

Haciendo $\Delta Q_2 = \Delta Q_3 = 0$:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = -B_{cc}^{-1} B_{gc}^T \Delta V_g = \begin{bmatrix} 1.1149 \\ 1.1149 \end{bmatrix} \Delta V_1$$

y

$$\Delta Q_1 = B_{gg} \Delta V_g + B_{gc} \Delta V_c = 31.2033 \Delta V_1 + \begin{bmatrix} -16.5017 & 16.5017 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}$$

En este caso, existen dos tensiones a corregir y una única variable de control: la tensión de consigna del único generador en servicio. Parece lógico determinar en primer lugar la actuación necesaria para corregir la tensión más crítica (nudo 2) pues, una vez corregida ésta, el resto de tensiones mejorarán y, en algunos casos, desaparecerán los problemas. Así, para una corrección necesaria $\Delta V_2 = -0.0435$, resulta:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 / 1.1149 = -0.039; \quad \Delta V_3 = 1.1149 \cdot \Delta V_1 = -0.0435$$

siendo necesario un incremento en la reactiva del generador de 21.8 Mvar. Puede observarse cómo, con dicha actuación, se corrige también la tensión del nodo 3.

La Figura 7.21 presenta los valores que se obtendrían realmente tras cambiar la tensión de consigna del generador, junto a los que se han obtenido con la aproximación lineal (entre paréntesis). Asimismo, en dicha figura se observa que también es posible corregir los problemas de tensiones abriendo las líneas que unen los nudos 2 y 3, líneas que transportan 90 MW entre ambas y que, al transportar poca potencia, inyectan una cantidad muy importante de potencia reactiva en la red. Obviamente, la apertura de líneas compromete la seguridad del sistema al eliminar caminos alternativos para el suministro de las demandas.

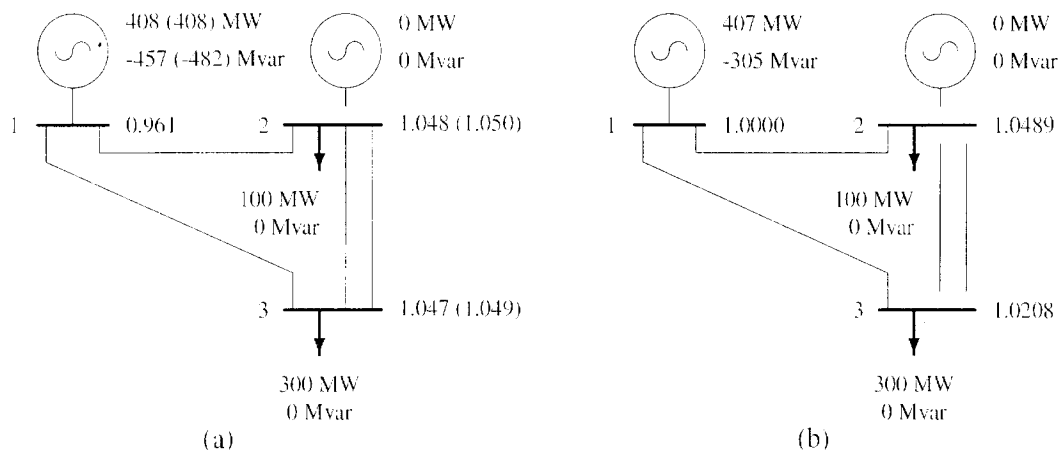


Figura 7.21 Red de 3 nudos del Problema 7.7 en situación de valle tras actuar sobre el generador (a) y abriendo las líneas que unen los nudos 2 y 3 (b).

7.8. En el sistema de la Figura 7.22, cuyos datos están expresados en p.u. respecto a una base de 100 MVA, 400 y 220 kV, la tensión de los nudos de consumo debe mantenerse entre unos límites de 0.95 y 1.05 p.u., actuando para ello sobre el generador y los dos transformadores. En el estado que muestra la Figura 7.22 se observa que las tensiones de los nudos 3 y 5 están excesivamente bajas, y que el generador no puede aumentar más su tensión de consigna ($0.9 \leq V_1 \leq 1.1$). Determinar las actuaciones a realizar sobre los transformadores para llevar las tensiones dentro de límites.

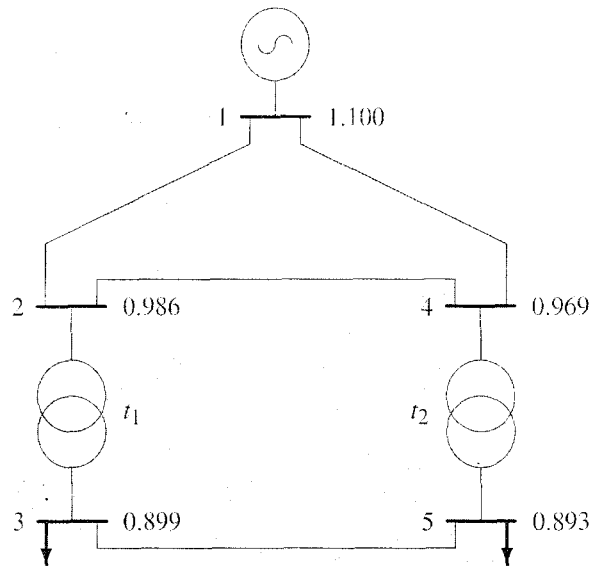


Figura 7.22 Red de 5 nudos del Problema 7.8.

Líneas y transformadores							
<i>i</i>	<i>j</i>	R	X	B	<i>S</i> _{MAX} (MVA)	<i>t</i>	<i>t</i> ^{min} , <i>t</i> ^{max} , Δ <i>t</i>
1	2	0.005	0.03	0.05	500		
1	4	0.010	0.06	0.06	500		
2	3	0.000	0.05	0.00	500	1.00	0.9, 1.1, 0.01
2	4	0.005	0.03	0.05	500		
3	5	0.010	0.05	0.03	500		
4	5	0.000	0.05	0.00	500	1.00	0.9, 1.1, 0.01

Tabla 7.9 Datos de las líneas y transformadores de la red de 5 nudos del Problema 7.8.

Nudos						
<i>i</i>	<i>V_i</i>	<i>θ_i</i>	<i>P_D</i>	<i>Q_D</i>	<i>P_G</i>	<i>Q_G</i>
	p.u.	grados	MW	Mvar	MW	Mvar
1	1.100	0.00			829	564
2	0.986	-7.34				
3	0.899	-20.97	400	100		
4	0.969	-8.79				
5	0.893	-21.55	400	100		

Tabla 7.10 Datos de los nudos de la red de 5 nudos del Problema 7.8.

Resolución

La matriz de admitancias nodales del sistema, en función de las relaciones de transformación *t*₁ y *t*₂, se compone de las siguientes matrices reales:

$$Y_n = G + jB$$

$$G = \begin{bmatrix} 8.108 & -5.405 & 0 & -2.703 & 0 \\ -5.405 & 10.811 & -5.405 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.846 & 0 & -3.846 \\ -2.703 & -5.405 & 0 & 8.108 & 0 \\ 0 & 0 & -3.846 & 0 & 3.846 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -48.594 & 32.432 & 0 & 16.216 & 0 \\ 32.432 & -\left(64.815 + \frac{20}{t_1}\right) & \frac{20}{t_1}j & 32.432 & 0 \\ 0 & \frac{20}{t_1} & -39.216j & 0 & +19.231 \\ 16.216 & 32.432 & 0 & -\left(48.594 + \frac{20}{t_2}\right) & \frac{20}{t_2} \\ 0 & 0 & 19.231 & \frac{20}{t_2} & -39.216 \end{bmatrix}$$

Trabajando con un modelo lineal basado en el jacobiano de las ecuaciones del sistema eléctrico, y teniendo en cuenta que las relaciones de transformación presentes en la matriz de admitancias son variables de control, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_g \\ \Delta Q_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{gg} & J_{gc} & J_{gt} \\ J_{cg} & J_{cc} & J_{ct} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_g \\ \Delta V_c \\ \Delta t \end{bmatrix}$$

Para el sistema de 5 nudos, con $t_1 = t_2 = 1.0$, resulta:

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.580 & -36.143 & 0 & -18.083 & 0 & 0 & 0 \\ -31.041 & 83.648 & -19.169 & -32.109 & 0 & -21.663 & 0 \\ 0 & -17.482 & 34.158 & 0 & -17.331 & 17.241 & 0 \\ -15.122 & -31.272 & 0 & 66.438 & -18.893 & 0 & -20.648 \\ 0 & 0 & -17.144 & -17.426 & 33.915 & 0 & 16.879 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \\ \Delta t_1 \\ \Delta t_2 \end{bmatrix}$$

Como $\Delta Q_c = 0$, se tiene que $\Delta V_c = -J_{cc}^{-1} (J_{cg} \Delta V_g + J_{ct} \Delta t)$. Por otra parte, al estar la tensión del generador en el límite superior, no es posible actuar sobre éste, resultando, con $\Delta V_g = 0$, que $\Delta V_c = -J_{cc}^{-1} J_{ct} \Delta t$:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0916 & -0.0161 \\ -0.6355 & -0.3021 \\ -0.0565 & 0.1385 \\ -0.3503 & -0.5792 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta t_1 \\ \Delta t_2 \end{bmatrix}$$

Es posible adoptar ahora distintas estrategias de actuación, por ejemplo:

- I. Actuar únicamente sobre el transformador que tiene mayor influencia sobre el nudo más crítico, en este caso el nudo 5:

$$\Delta V_5 = 0.95 - V_5 = 0.057 \implies \Delta t_2 = \frac{\Delta V_5}{-0.5792} = -0.0978$$

Lo cual, redondeando la actuación al valor discreto más próximo por exceso, implicaría llevar al transformador 2 a la toma mínima, $t_2 = 0.9$.

Con dicha actuación, las tensiones en los nudos de consumo resultarían:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.986 \\ 0.899 \\ 0.969 \\ 0.893 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0916 & -0.0161 \\ -0.6355 & -0.3021 \\ -0.0565 & 0.1385 \\ -0.3503 & -0.5792 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.988 \\ 0.930 \\ 0.955 \\ 0.951 \end{bmatrix}$$

Puede observarse cómo dicha actuación corrige la tensión del nudo 5, a costa de disminuir la tensión del otro extremo del transformador (nudo 4). Por otra parte, la actuación sobre t_2 no es suficiente pues aún existe violación de límites en el nudo 3, debiendo actuarse a continuación sobre t_1 :

$$\Delta V_3 = 0.95 - V_3 = 0.02 \implies \Delta t_1 = \frac{\Delta V_3}{-0.6356} = -0.032$$

Redondeando dicha actuación al valor discreto más próximo por exceso resulta $\Delta t_1 = -0.04$. Con dicha actuación, las tensiones en los nudos de consumo resultan ahora:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.988 \\ 0.930 \\ 0.955 \\ 0.951 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0916 & -0.0161 \\ -0.6355 & -0.3021 \\ -0.0565 & 0.1385 \\ -0.3503 & -0.5792 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.04 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.984 \\ 0.955 \\ 0.957 \\ 0.965 \end{bmatrix}$$

quedando resueltos los problemas de tensiones.

Obviamente, se conseguiría mayor exactitud si se hubiese recalculado el *jacobiano* tras modificar t_2 .

2. Actuar sobre los dos transformadores en proporción a sus respectivas sensibilidades sobre el nudo más crítico:

$$\Delta V_5 = 0.95 - V_5 = 0.057 = -0.3503\Delta t_1 - 0.5792\Delta t_2$$

$$\frac{\Delta t_1}{-0.3503} = \frac{\Delta t_2}{-0.5792}$$

Ecuaciones que proporcionan $\Delta t_1 = -0.0433$ y $\Delta t_2 = -0.0716$. Redondeando dichas actuaciones al valor discreto más próximo por exceso resulta $\Delta t_1 = -0.05$ y $\Delta t_2 = -0.08$.

Tras actuar sobre los dos transformadores con los incrementos calculados, las tensiones en los nudos de consumo resultarían:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.986 \\ 0.899 \\ 0.969 \\ 0.893 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0916 & -0.0161 \\ -0.6355 & -0.3021 \\ -0.0565 & 0.1385 \\ -0.3503 & -0.5792 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.983 \\ 0.956 \\ 0.960 \\ 0.957 \end{bmatrix}$$

Puede observarse cómo en este caso, la actuación sobre ambos transformadores permite corregir las tensiones que estaban fuera de límites, siempre a costa de disminuir las tensiones en el lado de alta de los transformadores.

A modo de comparación, la Figura 7.23 presenta el estado real que se obtendría con las actuaciones calculadas con ambas estrategias, mostrándose entre paréntesis los valores proporcionados por la aproximación lineal en cada caso. Puede observarse cómo el error asociado a las predicciones basadas en la aproximación lineal es relativamente elevado, siendo tanto más elevado cuanto mayor es la magnitud de las actuaciones.

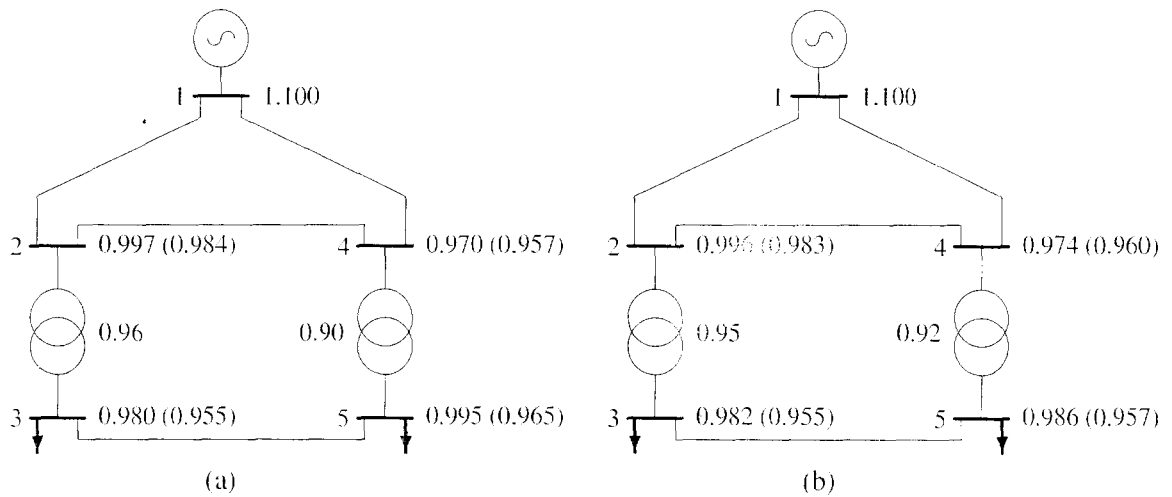
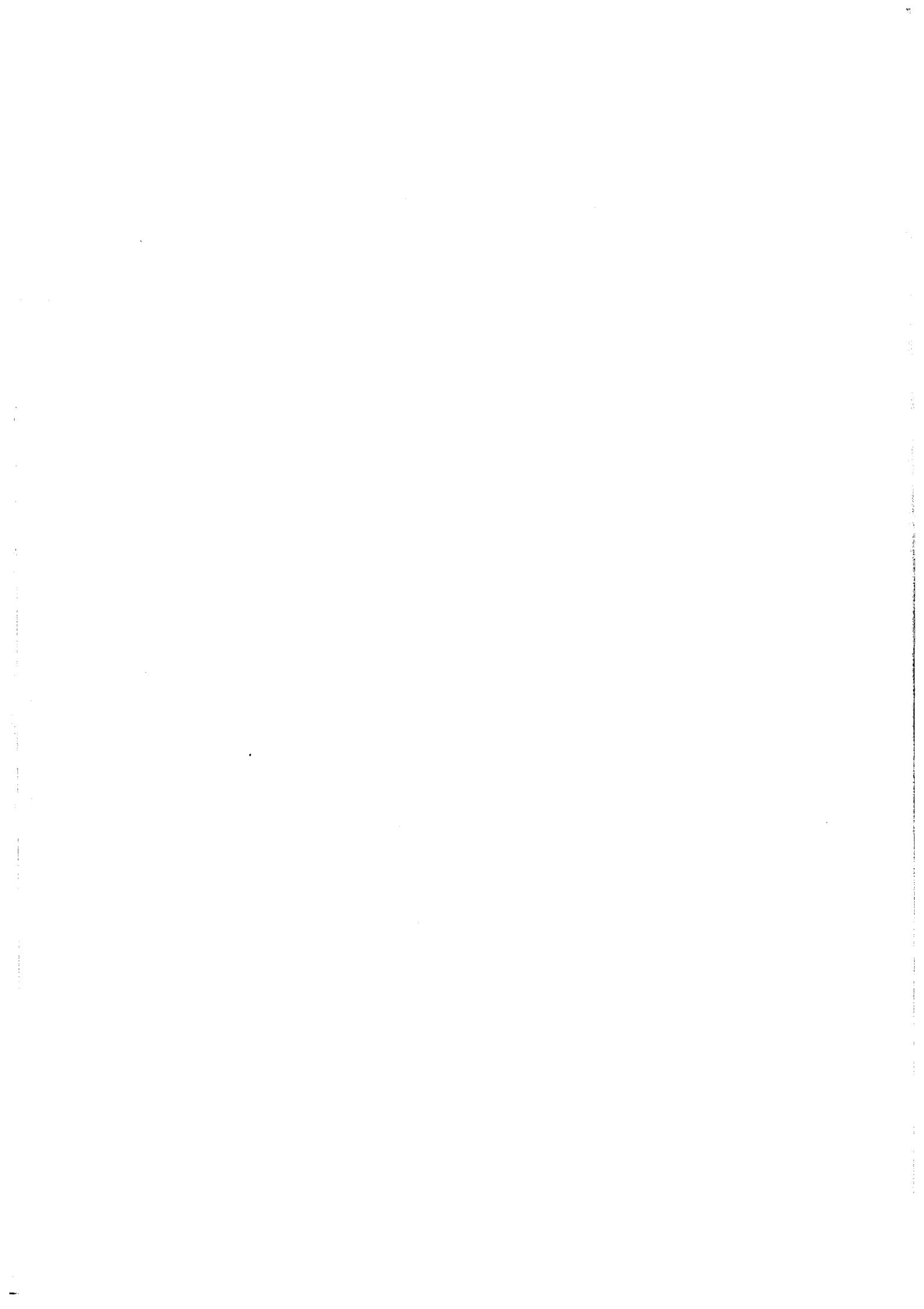


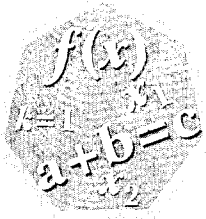
Figura 7.23 Red de 5 nudos del Problema 7.8 tras las actuaciones: (a) actuando sobre el transformador más sensible; (b) actuando sobre ambos transformadores.



Parte III

OPERACIÓN DEL SISTEMA DE POTENCIA





ESTIMACIÓN DE ESTADO

Un estimador de estado obtiene el estado óptimo, estadísticamente hablando, del sistema de potencia, sobre la base de: 1) la información suministrada en tiempo real por el SCADA (fundamentalmente topología de la red y medidas disponibles) y 2) modelos de sus elementos constitutivos (líneas, transformadores, etc.) almacenados en la base de datos. Además del estado, determinado como sabemos por las tensiones complejas en todos los nudos eléctricos, se obtienen valores estimados de las magnitudes medidas, lo cual permite evaluar la bondad de la estimación.

Alrededor del proceso de estimación de estado propiamente dicho, aparecen otras tareas auxiliares, tales como: 1) filtrado previo de medidas, para descartar errores evidentes; 2) determinación de la topología de la red a partir del estado de sus elementos de corte; 3) análisis de la estructura del sistema de medidas para ver si toda la red puede ser estimada; y 4) detección e identificación de medidas no gaussianas. En este prontuario sólo se considerará el último aspecto, inseparable de la estimación.

Todas las aplicaciones de los sistemas de control de energía utilizan la información suministrada por el estimador de estado, de ahí su importancia.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA

El sistema se supone en régimen sinusoidal permanente, debido a la lenta evolución de la carga, y equilibrado (modelo monofásico). Para una red de N nudos, el vector de estado x contiene $n = 2N - 1$ elementos (uno de los ángulos se toma como origen de fases). Considérese un vector z compuesto por m medidas, las cuales se relacionan con el vector de estado mediante la expresión:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix} = h(x) + e \quad (8.1)$$

donde:

$h_i(x)$ es la función, en general no lineal, que relaciona la medida i con el vector de estado.

e_i es el error asociado a la medida i .

El vector de medidas está compuesto por flujos e inyecciones de potencia activa y reactiva, así como módulos de tensiones (en niveles bajos de tensión se miden también amperios). Para el caso de medidas

de inyección, la relación con el vector de estado es la misma que en el flujo de cargas:

$$P_i^m = \sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + e_{P_i} \quad (8.2)$$

$$Q_i^m = \sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) + e_{Q_i} \quad (8.3)$$

mientras que para los flujos de potencia de un elemento conectado entre i y j se tiene que

$$P_{ij}^m = V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - G_{ij} V_i^2 + e_{P_{ij}} \quad (8.4)$$

$$Q_{ij}^m = V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) + V_i^2 (B_{ij} - b_{ij}^p) + e_{Q_{ij}} \quad (8.5)$$

siendo:

$V_i \angle \theta_i, V_j \angle \theta_j$ las tensiones complejas en los nudos i y j .

$\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$ el desfase entre los nudos i y j .

$G_{ij} + B_{ij}$ el elemento i - j de la matriz de admitancias de nudos.

b_{ij}^p la admitancia en derivación del elemento que une i con j .

La relación entre una medida de tensión y la variable de estado correspondiente es trivial:

$$V_i^m = V_i + e_{V_i} \quad (8.6)$$

A falta de otra información, se supone que los errores de las medidas siguen una distribución normal, con media nula y desviación típica σ_i , la cual debe reflejar la clase de los aparatos de medida involucrados. Asimismo, se supone que los errores son variables aleatorias independientes, es decir, $E[e_i e_j] = 0$. Por tanto, la matriz de covarianzas asociada a los errores es diagonal:

$$\text{Cov}(e) = E[e \cdot e^T] = R = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2\} \quad (8.7)$$

Para un modelo estadístico de las medidas como el supuesto, puede demostrarse que la estimación de máxima verosimilitud se obtiene minimizando el siguiente escalar:

$$J(x) = \sum_{i=1}^m \frac{[z_i - h_i(x)]^2}{\sigma_i^2} = r^T W r \quad (8.8)$$

donde $W = R^{-1}$ es una matriz de ponderación y $r = z - h(x)$ es el vector de residuos de las medidas. Este problema se conoce como *estimador de mínimos cuadrados ponderados*, por contraposición a otros estimadores, con propiedades estadísticas distintas, que minimizan funciones no cuadráticas del vector de residuos.

El mínimo de $J(x)$ se obtiene cuando $\partial J(x)/\partial x = 0$, lo que conduce a:

$$H^T(x) W [z - h(x)] = 0 \quad (8.9)$$

siendo $H(x) = \partial h(x)/\partial x$ el jacobiano de $h(x)$, de dimensión $m \times n$. La forma más fiable de resolver esta ecuación es mediante el método de Newton-Raphson, que requiere resolver en la iteración k -ésima el sistema de n ecuaciones siguiente, conocido como *ecuaciones normales*:

$$G(x^k) \Delta x^k = H^T(x^k) W [z - h(x^k)] \quad (8.10)$$

donde la matriz simétrica

$$G(x) = H^T(x) W H(x) \quad (8.11)$$

se denomina *matriz de ganancia*. Las ecuaciones normales tienen solución única cuando H es de rango completo, lo que implica que G es definida positiva. Si esto no ocurre, se dice que la red no es observable. La solución del sistema permite actualizar el vector de estado para la siguiente iteración:

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$$

El proceso comienza tomando perfil plano para el vector de estado, salvo que se disponga de mejores valores, y termina cuando todos los elementos de Δx son menores que una determinada tolerancia.

La Tabla 8.1 presenta los valores de los términos del jacobiano correspondientes a medidas de flujo e inyección.

Inyección		Flujo	
$\frac{\partial P_i}{\partial V_i}$	$\sum_{j=1}^N V_j(G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + V_i G_{ii}$	$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_i}$	$V_j(G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - 2 G_{ij} V_i$
$\frac{\partial P_i}{\partial V_j}$	$V_i(G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$	$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_j}$	$V_i(G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$
$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i}$	$\sum_{j=1}^N V_i V_j (-G_{ij} \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i^2 B_{ii}$	$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i}$	$V_i V_j (-G_{ij} \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cos \theta_{ij})$
$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j}$	$V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$	$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j}$	$V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$
$\frac{\partial Q_i}{\partial V_i}$	$\sum_{j=1}^N V_j(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i B_{ii}$	$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_i}$	$V_j(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) + 2V_i(B_{ij} - b_{ij}^p)$
$\frac{\partial Q_i}{\partial V_j}$	$V_i(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$	$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_j}$	$V_i(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$
$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i}$	$\sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - V_i^2 G_{ii}$	$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_i}$	$V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$
$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j}$	$-V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$	$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_j}$	$-V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$

Tabla 8.1 Elementos de H correspondientes a inyecciones y flujos.

Además de las medidas ordinarias, existen medidas virtuales exactas, tales como la inyección nula en los nudos de tránsito, que pueden incluirse como medidas de muy alto peso en el escalar $J(x)$. Esta solución, sin embargo, conduce en muchas ocasiones a problemas numéricos, por el mal escalamiento de los coeficientes del sistema de ecuaciones. Una alternativa más robusta numéricamente consiste en añadir esta información como restricciones de igualdad, con lo que el problema de estimación se convierte en:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } J(x) &= \frac{1}{2} [z - h(x)]^T W [z - h(x)] & (8.12) \\ \text{Sujeto a } c(x) &= 0 \end{aligned}$$

donde $c(x) = 0$ representa dichas restricciones. La aplicación del método de Newton a las condiciones de optimalidad de este problema conduce a la solución del siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} H^T W H & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T W r^k \\ -c(x^k) \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

donde λ es el vector de multiplicadores de Lagrange asociado a $c(x)$, y C denota el jacobiano de $c(x)$ en la iteración k .

Existen otras posibilidades, no contempladas aquí, para mejorar numéricamente el comportamiento de las ecuaciones normales, como el uso de la factorización ortogonal de H , que evita la construcción y factorización triangular de la matriz de ganancia.

En ocasiones, sobre todo en la fase de puesta en marcha del estimador, existen medidas cuyos errores no son gaussianos, pero tampoco lo suficientemente grandes como para ser detectados en el prefiltrado. Estas medidas deterioran la calidad de la estimación, y por tanto conviene identificarlas y eliminarlas.

Los métodos utilizados se basan, esencialmente, en las dos propiedades siguientes de los estimadores de mínimos cuadrados, que se cumplen cuando todas las medidas son gaussianas:

1. El escalar $J(\hat{x})$ sigue una distribución χ^2 con $m - n$ grados de libertad, siendo \hat{x} el estado estimado.
2. Los residuos, $r = z - h(\hat{x})$, siguen una distribución $N(0, \Omega)$, donde $\Omega = E[rr^T]$ es su matriz de covarianzas, que se obtiene de la expresión:

$$\Omega = R - H(H^T R^{-1} H)^{-1} H^T$$

Por tanto, los residuos normalizados

$$r_i^N = \frac{r_i}{\sqrt{\Omega_{ii}}}$$

son $N(0, 1)$.

La presencia de medidas erróneas se detecta, con un coste computacional reducido, por el valor de $J(\hat{x})$. Sea $\chi_{(m-n),p}^2$ el valor correspondiente a una probabilidad p (p.e., 95%) de la distribución χ^2 para $m - n$ grados de libertad. Si $J(\hat{x}) \geq \chi_{(m-n),p}^2$, se concluye que hay algún dato erróneo.

Puede demostrarse asimismo que, si existe una sola medida errónea, ésta provoca el mayor residuo normalizado en valor absoluto. Este resultado es válido para múltiples medidas erróneas siempre que la interacción entre las mismas sea despreciable. Por tanto, si el test χ^2 detecta tal circunstancia, se procede a calcular los residuos normalizados y a descartar la medida correspondiente al mayor residuo. Se repite el ciclo de estimación, detección y eliminación hasta que todos los residuos tengan un valor acorde a la distribución $N(0, 1)$, p.e., $|r_i^N| < 3$. Para que una medida errónea sea identificable es necesario que $m > n + 1$.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 8.1.** La Figura 8.1 representa una línea en la cual se tienen dispuestos dos vatímetros. Conocidas las características de los vatímetros y sus medidas, mostradas en la tabla siguiente, estimar el mejor valor de la potencia activa que circula por la línea.

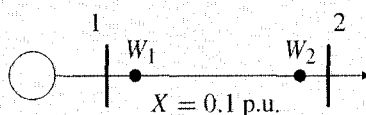


Figura 8.1 Línea con dos vatímetros.

Vatímetro	W_1	W_2
Magnitud medida	P_{12}	P_{21}
Fondo de escala	200 MW	200 MW
Desviación típica	1%	5%
Medida	62 MW	-52 MW

Tabla 8.2

Tomar una potencia base de 100 MVA y suponer que las tensiones se mantienen a sus valores nominales, utilizando el siguiente modelo para la potencia activa que circula por la línea (en p.u.):

$$P_{12} = \frac{1}{X} \sin \theta_{12}$$

Resolución

Tomando la referencia de ángulo en el nudo 2, tendremos $V_2 = 1 \angle 0$ y $V_1 = 1 \angle \theta$, siendo θ la variable de estado que hay que estimar. Las magnitudes medidas se expresan como:

$$P_{12} = \frac{1}{0.1} \operatorname{sen} \theta$$

$$P_{21} = \frac{-1}{0.1} \operatorname{sen} \theta$$

y siendo el vector de medidas

$$z = [0.62 \quad -0.52]'$$

Por tanto, el vector de residuos viene dado por:

$$z - h(\theta) = [0.62 - 10 \operatorname{sen} \theta \quad -0.52 + 10 \operatorname{sen} \theta]'$$

Para la matriz de ponderaciones tendremos en cuenta que las desviaciones típicas de las medidas son $\sigma_1 = 0.01$ y $\sigma_2 = 0.05$, con lo que:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 400 \end{bmatrix}$$

Con estos elementos, la formulación de mínimos cuadrados ponderados se reduce a minimizar

$$J(\theta) = [z - h(\theta)]' W [z - h(\theta)] = 10000(0.62 - 10 \operatorname{sen} \theta)^2 + 400(-0.52 + 10 \operatorname{sen} \theta)^2$$

La condición de optimalidad es:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = H' W [z - h(\theta)] = 0$$

siendo H la matriz jacobiana

$$H = \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta}$$

o bien, derivando directamente

$$20000(0.62 - 10 \operatorname{sen} \theta)(-10 \cos \theta) + 800(-0.52 + 10 \operatorname{sen} \theta)(10 \cos \theta) = 0$$

que se simplifica a

$$1000 \cos \theta (-128.16 + 2080 \operatorname{sen} \theta) = 0$$

la cual podemos resolver directamente.

Despreciando las soluciones de $\cos \theta = 0$, nos queda $\operatorname{sen} \theta = \frac{128.16}{2080}$, luego $\theta = 0.06165$ rad y la estimación de potencia sería

$$P_{12} = -P_{21} = \frac{1}{0.1} \operatorname{sen} \theta = 0.6161 \text{ p.u.} = 61.61 \text{ MW}$$

Nótese que no es posible realizar un test para la detección de medidas erróneas ya que no existe redundancia suficiente. Con una variable de estado serían necesarias tres medidas como mínimo.

8.2. En la red de la Figura 8.2, compuesta por un generador que alimenta una carga a través de una línea de reactancia 0.1 p.u., se han dispuesto los siguientes aparatos de medida:

- Dos voltímetros que miden V_1 y V_2 , y cuya varianza es $\sigma^2 = 0.01$ p.u.
- Un vatímetro y un varímetro que miden P_2 y Q_2 respectivamente, y cuya varianza es de $\sigma^2 = 0.1$ p.u.

Sabiendo que los voltímetros marcan respectivamente 1.01 y 0.99, y que el consumo medido es de $P_2 = 5.0$ p.u. y $Q_2 = -1.0$, determinar el estado del sistema por mínimos cuadrados ponderados.

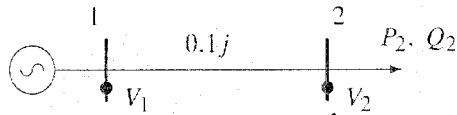


Figura 8.2 Sistema de dos nudos con cuatro medidas.

Resolución

En este problema tomaremos origen de fases en el nudo 2, con lo que su tensión la expresaremos como $V_2 \angle 0$, y la tensión del nudo 1 como $V_1 \angle \theta$. Así pues, las variables que describen el estado del sistema son:

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \theta \end{bmatrix}$$

Las medidas adquiridas

$$z = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 0.99 \\ 5.00 \\ -1.00 \end{bmatrix}$$

se expresan en función de las variables de estado como:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 10x_0x_1 \sin x_2 \\ 10x_1(x_0 \cos x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

puesto que

$$P_2 = \frac{1}{0.1} V_1 V_2 \sin \theta = 10x_0x_1 \sin x_2$$

$$Q_2 = \frac{1}{0.1} V_2 (V_1 \cos \theta - V_2) = 10x_1(x_0 \cos x_2 - x_1)$$

La función a minimizar es $J(x) = (z - h(x))^T W (z - h(x))$ que se consigue resolviendo

$$H^T W [z - h(x)] = 0 \quad (8.14)$$

siendo H la matriz jacobiana, $H_{i,j} = \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10x_1 \sin x_2 & 10x_0 \sin x_2 & 10x_0x_1 \cos x_2 \\ 10x_1 \cos x_2 & 10x_0 \cos x_2 - 20x_1 & -10x_0x_1 \sin x_2 \end{bmatrix}$$

y la matriz de pesos:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Para resolver (8.14), recurrimos a un método iterativo:

$$G\Delta x^n = H^T W [z - h(x^n)] \quad (8.15)$$

$$x^{n+1} = x^n + \Delta x^n \quad (8.16)$$

siendo $G = H^T W H$ la matriz de ganancia.

Para la primera iteración partiremos de un perfil plano

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego el vector de residuos es:

$$r(x^0) = z - h(x^0) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 5.00 \\ -1.00 \end{bmatrix}$$

La función objetivo vale $J(x^0) = r^T W r = 260.02$.

Por otra parte, la matriz jacobiana resulta

$$H(x^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 10 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz de ganancia

$$G(x^0) = \begin{bmatrix} 1100 & -1000 & 0 \\ -1000 & 1100 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la Ecuación (8.15) obtenemos:

$$\Delta x^0 = \begin{bmatrix} -0.0471 \\ 0.0471 \\ 0.5000 \end{bmatrix}$$

y el nuevo estado

$$x^1 = x^0 + \Delta x^0 = \begin{bmatrix} 0.9529 \\ 1.0471 \\ 0.5000 \end{bmatrix}$$

La función a minimizar, $J(x)$, ya ha bajado para este estado hasta 15.73. Basta con realizar nuevas iteraciones para acercarnos más al óptimo.

Para la siguiente iteración, obtendremos:

$$r(x^1) = z - h(x^1) = \begin{bmatrix} 0.0571 \\ -0.0571 \\ 0.2164 \\ 1.2088 \end{bmatrix}$$

$$H(x^1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5.0203 & 4.5682 & 8.7563 \\ 9.1895 & -12.5807 & -4.7836 \end{bmatrix}$$

y la matriz de ganancia

$$G(x^1) = \begin{bmatrix} 1196.51 & -926.77 & 0 \\ -926.77 & 1891.44 & 1001.82 \\ 0 & 1001.82 & 995.56 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\Delta x^1 = \begin{bmatrix} 0.0603 \\ -0.0598 \\ 0.0212 \end{bmatrix}$$

y el nuevo estado

$$x^2 = x^1 + \Delta x^1 = \begin{bmatrix} 1.0132 \\ 0.9873 \\ 0.5212 \end{bmatrix}$$

La siguiente iteración conduce a

$$x^3 = \begin{bmatrix} 1.0190 \\ 0.9914 \\ 0.5172 \end{bmatrix}$$

y la cuarta y sucesivas a

$$x^4 = \begin{bmatrix} 1.0178 \\ 0.9845 \\ 0.5220 \end{bmatrix}$$

con $J(x^4) = J(x^n) = 0.0097$, por lo que ésa es ya la solución de la Ecuación (8.14): $V_1 = 1.0178$, $V_2 = 0.9845$ y $\theta = 0.522 \text{ rad} = 29.908^\circ$.

- 8.3.** En la red de la Figura 8.3, con reactancias de líneas $X_{12} = X_{13} = X_{23} = 0.1j$, se dispone de las medidas y varianzas de los aparatos de medida que aparecen en la tabla siguiente:

Magnitud	Valor p.u.	Varianza
V_1	0.95	10^{-3}
V_2	1.02	10^{-3}
V_3	1.03	10^{-3}
P_{12}	1	10^{-2}
Q_{21}	-0.4	10^{-2}
P_{13}	0.8	10^{-2}
Q_{31}	-0.2	10^{-2}

Tabla 8.3

Estimar el mejor estado en el sentido de los mínimos cuadrados ponderados y detectar la presencia de medidas erróneas si las hubiera.

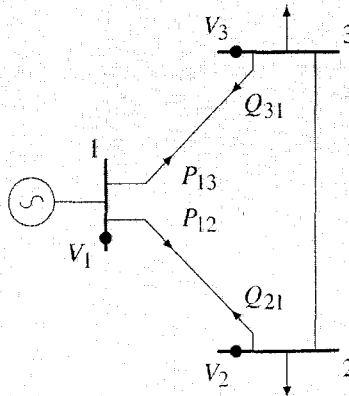


Figura 8.3 Red con 3 nudos.

Resolución

El estado de la red vendrá descrito por $u_1 = V_1 |_{\theta_1}$, $u_2 = V_2 |_{\theta_2}$ y $u_3 = V_3 |_{\theta_3}$. Para su tratamiento sistemático consideramos el vector de estado:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Asimismo, consideramos un vector de medidas tal como:

$$z = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ P_{12} \\ Q_{21} \\ P_{13} \\ Q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 1.02 \\ 1.03 \\ 1.00 \\ -0.40 \\ 0.80 \\ -0.20 \end{bmatrix}$$

con matriz de pesos

$$W = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

La relación entre medidas y vector de estado es

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{x_1 x_2}{X_{12}} \text{sen}(-x_4) \\ \frac{-x_2}{X_{12}} [x_1 \cos(-x_4) - x_2] \\ \frac{x_1 x_3}{X_{13}} \text{sen}(-x_5) \\ \frac{-x_3}{X_{13}} [x_1 \cos(-x_5) - x_3] \end{bmatrix}$$

y la matriz jacobiana, con $H_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}$:

$$H(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x_2}{X_{12}} \text{sen}(-x_4) & \frac{x_1}{X_{12}} \text{sen}(-x_4) & 0 & \frac{-x_1 x_2}{X_{12}} \cos(x_4) & 0 \\ \frac{-x_2}{X_{12}} \cos(x_4) & \frac{-[x_1 \cos(x_4) - 2x_2]}{X_{12}} & 0 & \frac{x_1 x_2}{X_{12}} \text{sen}(x_4) & 0 \\ \frac{x_3}{X_{13}} \text{sen}(-x_5) & 0 & \frac{x_1}{X_{13}} \text{sen}(-x_5) & 0 & \frac{-x_1 x_3}{X_{13}} \cos(x_5) \\ \frac{-x_3}{X_{13}} \cos(x_5) & 0 & \frac{-[x_1 \cos(x_5) - 2x_3]}{X_{13}} & 0 & \frac{x_1 x_3}{X_{13}} \text{sen}(x_5) \end{bmatrix}$$

El vector de estado inicial

$$x^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

conduce a:

- Vector de relación entre medidas y estado

$$h(x^0) = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

- Matriz jacobiana

$$H(x^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ -10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ganancia

$$G(x^0) = H^T W H = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 21 & -10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

- Vector de residuos

$$r(x^0) = z - h(x^0) = \begin{bmatrix} -0.0500 \\ 0.0200 \\ 0.0300 \\ 1.0000 \\ -0.4000 \\ 0.8000 \\ -0.2000 \end{bmatrix}$$

Los incrementos que se obtienen para la primera iteración son:

$$\Delta x^0 = G^{-1} H^T W r = \begin{bmatrix} 0.0177 \\ -0.0184 \\ 0.0007 \\ -0.1000 \\ -0.0800 \end{bmatrix}$$

y, actualizando, obtenemos la nueva estimación del estado

$$x^1 = x^0 + \Delta x^0 = \begin{bmatrix} 1.0177 \\ 0.9816 \\ 1.0007 \\ -0.1000 \\ -0.0800 \end{bmatrix}$$

Tras 4 iteraciones, el método converge a:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1.0216 \\ 0.9800 \\ 1.0013 \\ -0.0996 \\ -0.0781 \end{bmatrix}$$

con residuos

$$r(\hat{x}) = \begin{bmatrix} -0.0715 \\ 0.0400 \\ 0.0286 \\ 0.0043 \\ -0.0433 \\ 0.0023 \\ -0.0299 \end{bmatrix}$$

y función de coste $J(\hat{x}) = r^T W r = 7.8062$.

Para dictaminar la existencia de alguna medida errónea usaremos un intervalo de confianza del 95%. Con 7 medidas y 5 variables de estado, $J(x)$ debe seguir una distribución χ^2 con 2 grados de libertad. Utilizando tablas o la función inversa de la probabilidad de dicha distribución, encontramos que el 95% de la masa probabilística queda encerrado por la cota 5.9915, valor que es sobrepasado por la función objetivo, por lo cual debemos concluir que existe alguna medida errónea.

Para la identificación de la medida errónea deberemos normalizar el vector de residuos con sus respectivas covarianzas.

La matriz de covarianzas de los residuos, Ω , la obtenemos con $\Omega = R - H(H^T R^{-1} H)^{-1} H^T$:

$$\Omega = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.6612 & -0.3203 & -0.3148 & -0.0343 & 0.3431 & -0.0252 & 0.3218 \\ -0.3203 & 0.5933 & -0.2976 & 0.0635 & -0.6355 & -0.0238 & 0.3043 \\ -0.3148 & -0.2976 & 0.6124 & -0.0319 & 0.3188 & 0.0490 & -0.6260 \\ -0.0343 & 0.0635 & -0.0319 & 0.0068 & -0.0680 & -0.0025 & 0.0326 \\ 0.3431 & -0.6355 & 0.3188 & -0.0680 & 0.6808 & 0.0255 & -0.3260 \\ -0.0252 & -0.0238 & 0.0490 & -0.0025 & 0.0255 & 0.0039 & -0.0501 \\ 0.3218 & 0.3043 & -0.6260 & 0.0326 & -0.3260 & -0.0501 & 0.6400 \end{bmatrix}$$

Los residuos normalizados, obtenidos con

$$r_i^N = \frac{r_i}{\sqrt{\Omega_{ii}}}$$

valen:

$$r^N = \begin{bmatrix} -2.7806 \\ 1.6406 \\ 1.1557 \\ 1.6611 \\ -1.6599 \\ 1.1733 \\ -1.1806 \end{bmatrix}$$

Y, puesto que el mayor valor absoluto lo presenta $|r_1^N| = 2.7824$, concluimos que la medida incorrecta es la de V_1 . También podemos realizar el test a los residuos normalizados, de carácter normal $N(0, 1)$. En este caso, la cota para los residuos en un test de 95% de confianza es 1.6449, siendo nuevamente $|r_1^N|$ el que más sobrepasa dicho valor.

- 8.4.** Obtener la estimación del estado correspondiente al problema anterior, una vez que se descarta la medida identificada como errónea.

Resolución

Una vez descartada la medida V_1 , debemos estimar el estado sobre la base de las medidas:

$$z = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ P_{12} \\ Q_{21} \\ P_{13} \\ Q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 1.03 \\ 1.00 \\ -0.40 \\ 0.80 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

con matriz de pesos

$$W = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

La relación entre medidas y vector de estado, así como la matriz jacobiana se obtienen del problema anterior omitiendo la primera fila.

El vector de estado inicial

$$x^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

conduce a:

- Vector de relación entre medidas y estado

$$h(x^0) = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

- Matriz jacobiana

$$H(x^0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ -10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ganancia

$$G(x^0) = H^T W H = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 20 & -10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

- Vector de residuos

$$r(x^0) = z - h(x^0) = \begin{bmatrix} 0.0200 \\ 0.0300 \\ 1.0000 \\ -0.4000 \\ 0.8000 \\ -0.2000 \end{bmatrix}$$

Los incrementos que se obtienen para la primera iteración son:

$$\Delta x^0 = G^{-1} H^T W r = \begin{bmatrix} 0.0550 \\ 0.0155 \\ 0.0345 \\ -0.1000 \\ -0.0800 \end{bmatrix}$$

y, actualizando, obtenemos la nueva estimación del estado

$$x^1 = x^0 + \Delta x^0 = \begin{bmatrix} 1.0550 \\ 1.0155 \\ 1.0345 \\ -0.1000 \\ -0.0800 \end{bmatrix}$$

Tras 3 iteraciones, el método converge a:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1.0581 \\ 1.0147 \\ 1.0355 \\ -0.0932 \\ -0.0731 \end{bmatrix}$$

con residuos

$$r(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0.0054 \\ -0.0055 \\ 0.0008 \\ -0.0052 \\ -0.0001 \\ 0.0048 \end{bmatrix}$$

y función de coste $J(\hat{x}) = r^T W r = 0.0645$.

Se puede comprobar de nuevo si alguna medida debe ser clasificada todavía como errónea, aunque ya no exista redundancia para identificar cuál. $J(x)$ debe seguir una distribución χ^2 de 1 grado de libertad. Para usar un 5% de nivel de significación (intervalo del 95% de confianza), necesitamos la cota de dicha distribución que encierra el 95% de la masa probabilística, que resulta ser 3.8415. Y puesto que $J(\hat{x})$ no alcanza ese valor no tenemos motivos para suponer que exista otra medida errónea. La misma conclusión se obtendría analizando los residuos una vez normalizados.

- 8.5.** En el sistema de la Figura 8.4 se tienen las medidas de la siguiente tabla, en la que se muestran también sus respectivas varianzas:

Magnitud	Valor p.u.	Varianza
V_1	1.05	10^{-3}
V_2	1	10^{-3}
V_3	0.95	10^{-3}
P_3	1	10^{-2}
Q_3	0.2	10^{-2}

Tabla 8.4

Estimar el mejor estado en el sentido de los mínimos cuadrados ponderados:

1. Considerando medidas de potencia de peso elevado en los nudos de tránsito.
2. Incorporando la información de potencias de los nudos de tránsito como restricciones de igualdad.

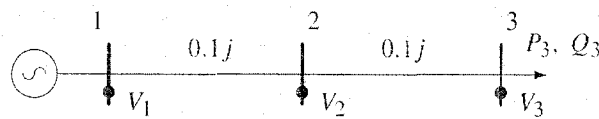


Figura 8.4 Sistema con nudo de paso.

Resolución

Llamando $u_1 = V_1$, $u_2 = V_2$ y $u_3 = V_3$ a las tensiones en los nudos, consideraremos un vector de estado

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Asimismo, para el desarrollo del primer apartado, consideramos un vector de medidas tal como:

$$z = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ P_2 \\ Q_2 \\ P_3 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05 \\ 1 \\ 0.95 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

con matriz de pesos

$$W = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^2 \end{bmatrix}$$

Donde se han considerado medidas de valor 0 para las potencias activa y reactiva consumidas en el nudo 2. Por tratarse de medidas ficticias, de cuyos valores tenemos certeza, les hemos asignado pesos de 10^6 , mil veces mayores que los de los voltímetros.

La relación entre medidas y vector de estado es:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -10x_1x_2 \operatorname{sen}(x_4) - 10x_2x_3 \operatorname{sen}(x_4 - x_5) \\ 10x_2(x_1 \cos(x_4) - x_2) - 10x_2(x_2 - x_3 \cos(x_4 - x_5)) \\ 10x_2x_3 \operatorname{sen}(x_4 - x_5) \\ 10x_3(x_2 \cos(x_4 - x_5) - x_3) \end{bmatrix}$$

El vector de estado inicial

$$x^0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

conduce a:

- Vector de relación entre medidas y estado

$$h(x^0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

- Matriz jacobiana

$$H(x^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 10 \\ 10 & -20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ganancia

$$G(x^0) = H^T W H = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 100001 & -200000 & 100000 & 0 & 0 \\ -200000 & 400011 & -200010 & 0 & 0 \\ 100000 & -200010 & 100011 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 400010 & -200010 \\ 0 & 0 & 0 & -200010 & 100010 \end{bmatrix}$$

- Vector de residuos

$$r(x^0) = z - h(x^0) = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.00 \\ -0.05 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 1.00 \\ 0.20 \end{bmatrix}$$

Los incrementos que se obtienen para la primera iteración son:

$$\Delta x^0 = G^{-1} H^T W r = \begin{bmatrix} 0.0250 \\ 0.0000 \\ -0.0250 \\ -0.1000 \\ -0.2000 \end{bmatrix}$$

y, actualizando, obtenemos la nueva estimación del estado

$$x^1 = x^0 + \Delta x^0 = \begin{bmatrix} 1.0250 \\ 1.0000 \\ 0.9750 \\ -0.1000 \\ -0.2000 \end{bmatrix}$$

Tras 4 iteraciones, el método converge a:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1.0358 \\ 0.9960 \\ 0.9664 \\ -0.0977 \\ -0.2024 \end{bmatrix}$$

con residuos

$$r(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0.0142 \\ 0.0040 \\ -0.0164 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.0063 \\ -0.0329 \end{bmatrix}$$

y función de coste $J(\hat{x}) = r^T W r = 0.6022$.

Para el Apartado 2 consideraremos sólo las medidas que realmente tenemos:

$$z = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ P_3 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05 \\ 1 \\ 0.95 \\ 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Sobre la base de dichas medidas nos planteamos el problema de:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } J(x) &= \frac{1}{2} [z - h(x)]^T W [z - h(x)] \\ \text{Sujeto a } c(x) &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 10x_2x_3 \operatorname{sen}(x_4 - x_5) \\ 10x_3(x_2 \cos(x_4 - x_5) - x_3) \end{bmatrix}$$

es la relación entre medidas y vector de estado, y

$$c(x) = \begin{bmatrix} -10x_1x_2 \operatorname{sen}(x_4) - 10x_2x_3 \operatorname{sen}(x_4 - x_5) \\ 10x_2(x_1 \cos(x_4) - x_2) - 10x_2(x_2 - x_3 \cos(x_4 - x_5)) \end{bmatrix}$$

son las restricciones de que las potencias activa y reactiva demandadas en el nudo 2 son nulas.

La solución de este problema se consigue iterando con el sistema:

$$\begin{bmatrix} H^T W H & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T W r^k \\ -c(x^k) \end{bmatrix}$$

$$y \ x^{k+1} = x^k + \Delta x^k.$$

La matriz jacobiana para las medidas, H , es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10x_3 \operatorname{sen}(x_4 - x_5) & 10x_2 \operatorname{sen}(x_4 - x_5) & 10x_2x_3 \cos(x_4 - x_5) & -10x_2x_3 \cos(x_4 - x_5) \\ 0 & 10x_3 \cos(x_4 - x_5) & 10x_2 \cos(x_4 - x_5) - 20x_3 & -10x_2x_3 \operatorname{sen}(x_4 - x_5) & 10x_2x_3 \operatorname{sen}(x_4 - x_5) \end{bmatrix}$$

consiguiéndose de modo análogo la matriz jacobiana para las restricciones

$$C_{ij} = \frac{\partial c_i}{\partial x_j}$$

El vector de estado inicial

$$x^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

conduce a:

- Vector de relación entre medidas y estado

$$h(x^0) = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

- Matriz jacobiana de medidas

$$H(x^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz jacobiana de restricciones

$$C(x^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -20 & 10 \\ 10 & -20 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ganancia

$$G(x^0) = H^T W H = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

- Vector de residuos de las medidas

$$r(x^0) = z - h(x^0) = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.00 \\ -0.05 \\ 1.00 \\ 0.20 \end{bmatrix}$$

- Vector de residuos de las restricciones

$$-c(x^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En la primera iteración se obtienen los incrementos:

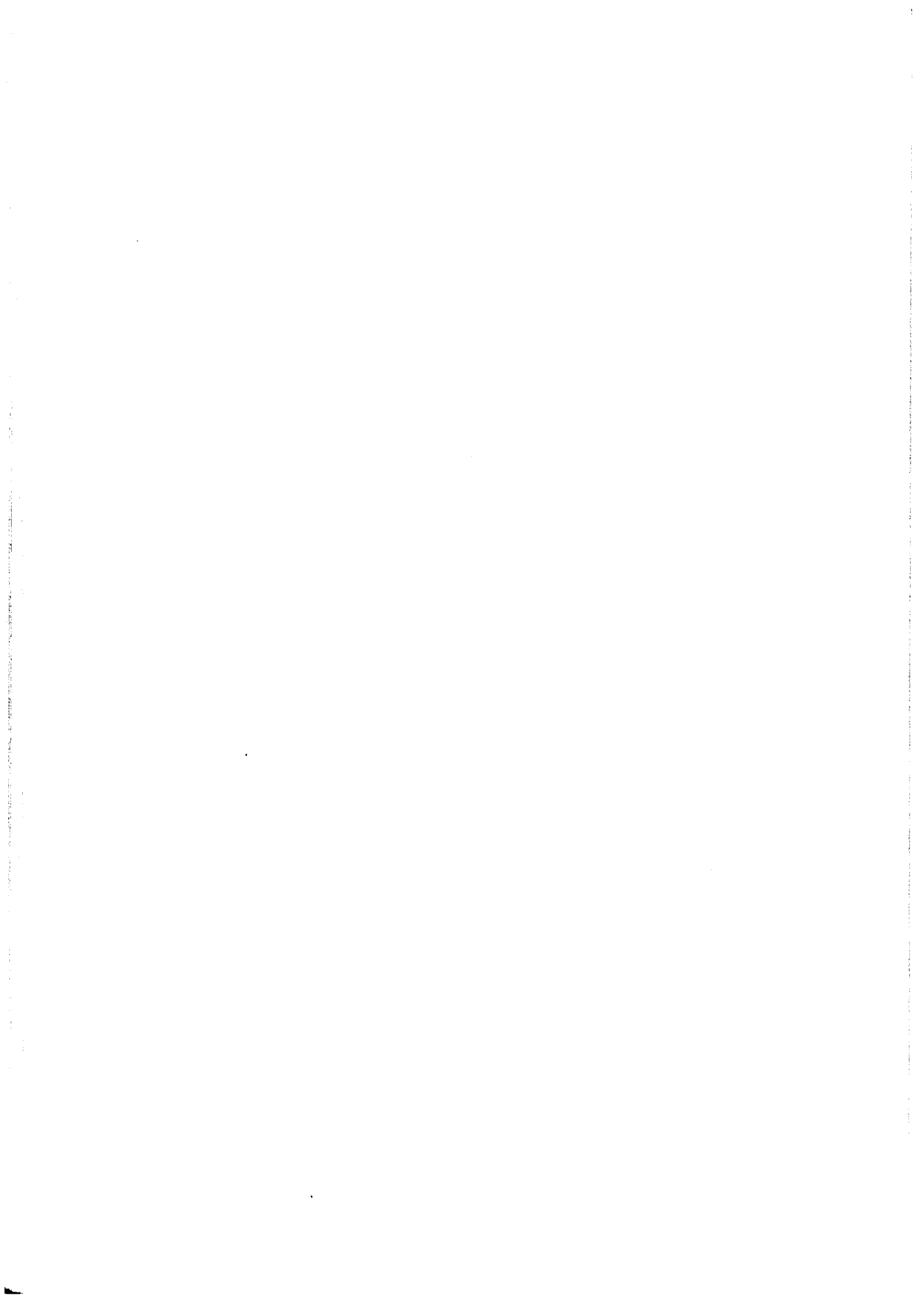
$$\Delta x^0 = \begin{bmatrix} 0.0250 \\ 0.0000 \\ -0.0250 \\ -0.1000 \\ -0.2000 \end{bmatrix}$$

y el multiplicador de Lagrange $\lambda = -2.5$.

Actualizando, obtenemos la nueva estimación del estado:

$$x^1 = x^0 + \Delta x^0 = \begin{bmatrix} 1.0250 \\ 1.0000 \\ 0.9750 \\ -0.1000 \\ -0.2000 \end{bmatrix}$$

Tras 4 iteraciones, el método converge, prácticamente, al mismo estado que en el Apartado 1, siendo el multiplicador de Lagrange en este estado $\lambda = -1.4195$.



EVALUACIÓN DE LA SEGURIDAD

El objetivo más importante que se persigue en los centros de control de los *sistemas eléctricos de potencia* es asegurar el suministro. Esto se logra cuando el sistema tiene capacidad de permanecer en un estado normal ante cambios previstos e imprevistos en el mismo. Se considera que el sistema se encuentra en estado normal cuando la demanda es satisfecha y las magnitudes eléctricas están dentro de unos límites. Una clasificación de los distintos estados del sistema eléctrico es la mostrada en la Figura 9.1.

En la planificación y explotación de los *sistemas eléctricos de potencia* se necesita una herramienta capaz de evaluar la seguridad del sistema. Esta herramienta determina el estado de la red tras la pérdida de uno o varios de sus elementos, detectando sobrecargas o tensiones anómalas. Para determinar estos estados se necesita realizar sucesivos flujos de cargas, siendo el método desacoplado rápido el más usual. Teniendo en cuenta la magnitud del problema a tratar, éste se ha resuelto históricamente usando distintas aproximaciones:

- No analizando todas las contingencias posibles. En esta línea destacan los métodos de clasificación y de selección.
- Analizando las contingencias de manera aproximada, usando un reparto de cargas en continua, o una iteración del flujo de cargas desacoplado rápido.
- Analizando sólo una zona del sistema eléctrico (métodos zonales).

En este capítulo sólo se estudia la segunda opción, basada en un modelo lineal para las potencias activas. Si se desean estudiar las tensiones, es preciso al menos realizar una iteración $Q-V$ del subproblema de reactiva en el método desacoplado rápido.

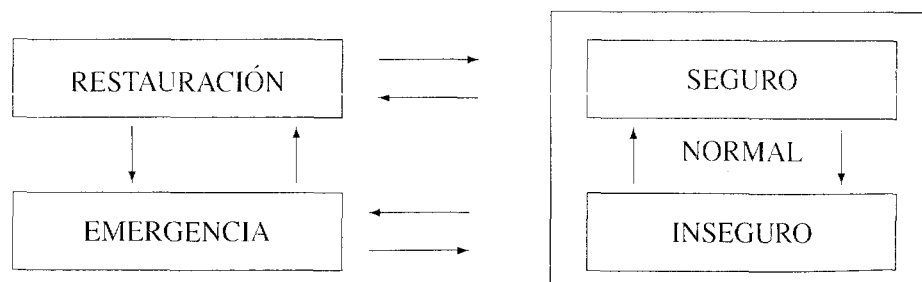


Figura 9.1 Posibles estados del sistema.

Para detectar sobrecargas de manera aproximada se puede recurrir a los factores de distribución, que son los coeficientes que ligan flujos por las líneas con inyecciones en los nudos. Estos factores se hallan sobre la base de la linealidad que presenta el problema de activa (reparto de cargas en continua):

$$P = B' \cdot \theta \quad (9.1)$$

cuya relación inversa en forma incremental es

$$\Delta\theta = S \cdot \Delta P \quad (9.2)$$

Estos factores de distribución presentan la ventaja de que pueden ser calculados *a priori*, antes de realizar el análisis de contingencias.

Estos factores permiten analizar la variación del flujo de potencia activa que circula por una línea, cuando se varía la potencia generada/consumida en un nudo del mismo.

Suponiendo un incremento unidad en la potencia del nudo i y que el nudo 1 es el de referencia:

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\theta_n \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \Delta\theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{2,i} \\ \vdots \\ S_{n,i} \end{pmatrix}$$

El factor de distribución para una línea mn será:

$$\rho_{mn}^i = \frac{\Delta P_{mn}^i}{\Delta P_i} = \frac{S_{m,i} - S_{n,i}}{X_{mn}}$$

El significado de este factor de distribución es cuánto varía el flujo por la línea mn cuando aumenta en 1 MW la potencia generada en el nudo i .

El cambio de potencia en una línea mn ante un fallo en un generador situado en el nudo i se obtiene como:

- Si toda la generación perdida es asumida por el generador de referencia

$$\Delta P_{mn} = \rho_{mn}^i \cdot \Delta P_i \quad (9.3)$$

- Si la generación perdida es asumida por el resto de generadores según unos coeficientes γ_{ji} , p.e., en proporción a sus capacidades

$$\Delta P_{mn} = \rho_{mn}^i \cdot \Delta P_i - \sum_{j \neq i} \rho_{mn}^j \cdot \gamma_{ji} \Delta P_i; \quad \gamma_{ji} = \frac{P_j^{\max}}{\sum_{k \neq i} P_k^{\max}} \quad (9.4)$$

Estos factores de distribución se usan para hallar la variación del flujo de potencia activa por una línea (mn) cuando se abre otra línea (ij). Para ello se utiliza el teorema de compensación (véase la Figura 9.2) que permite calcular los incrementos de las magnitudes eléctricas cuando se abre la línea.

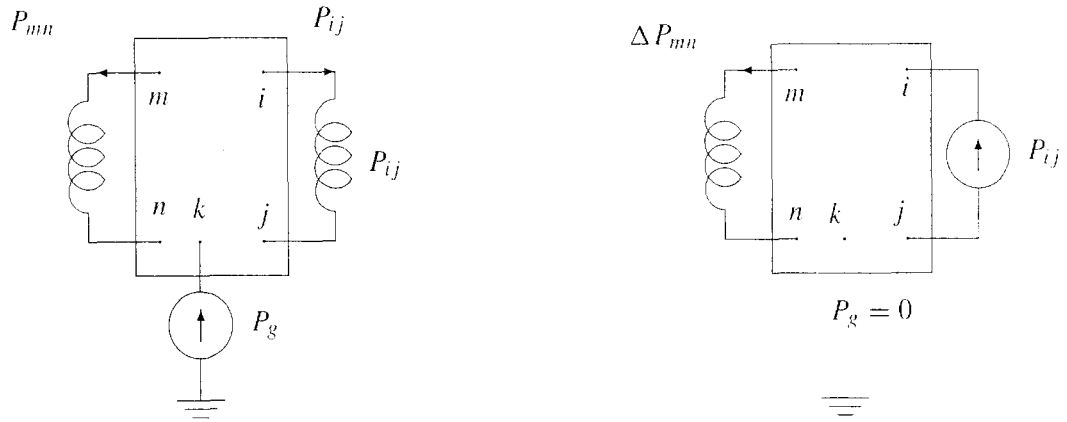


Figura 9.2 Aplicación del teorema de compensación.

Resolviendo para $P_{ij} = 1$, se obtienen los incrementos $\Delta\theta$ de todos los nudos del sistema:

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta_2^{ij} \\ \vdots \\ \Delta\theta_n^{ij} \end{pmatrix} = S^{\text{mod}} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \end{matrix}$$

donde S^{mod} se refiere a la red sin la rama ij .

El factor de distribución para una línea mn es:

$$\rho_{mn}^{ij} = \frac{\Delta P_{mn}^{ij}}{P_{ij}} = \frac{\Delta\theta_m^{ij} - \Delta\theta_n^{ij}}{X_{mn}} \quad (9.5)$$

El inconveniente de este método es la necesidad de actualizar la matriz de sensibilidades S^{mod} , según la contingencia a estudiar.

Para soslayar este problema se pueden hallar estos factores de distribución modelando la pérdida de la línea o el transformador mediante dos inyecciones de potencia ficticias en los nudos extremos. Esto permite que a partir de los factores de distribución de los generadores/cargas, anteriormente hallados, se puedan encontrar los factores de distribución para líneas/transformadores de la expresión:

$$\rho_{mn}^{ij} = \frac{\rho_{mn}^i - \rho_{mn}^j}{1 - \rho_{ij}^i + \rho_{ij}^j} \quad (9.6)$$

Si se desea realizar un control preventivo corrigiendo sobrecargas futuras se pueden usar los factores de distribución compensados. Estos factores modelan el incremento del flujo de potencia por la línea mn debido a un incremento de generación en el nudo g con la línea ij fuera de servicio, a partir de:

$$\Delta P_{mn}^g \Big|_{ij=\text{fallo}} = \rho_{mn}^g \cdot \Delta P_g + \rho_{mn}^{ij} \cdot \rho_{ij}^g \cdot \Delta P_g \quad (9.7)$$

de donde

$$\rho_{mn}^g \Big|_{ij=\text{fallo}} = \frac{\Delta P_{mn}}{\Delta P_g} \Big|_{ij=\text{fallo}} = \rho_{mn}^g + \rho_{mn}^{ij} \cdot \rho_{ij}^g \quad (9.8)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- 9.1. La red de la Figura 9.3, cuyos datos se indican en la Tabla 9.1, se compone de un nudo de generación 0, un nudo de consumo 1, con una carga de 100 MW y 50 Mvar, y un nudo 2 que actúa de interfaz con una red exterior, de la cual importa 50 MW. Las tensiones de los tres nudos se mantienen a 1 p.u. mediante la adecuada inyección de reactiva.

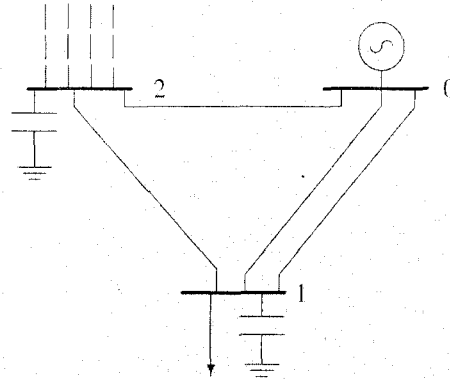


Figura 9.3 Esquema unifilar de la red del Problema 9.1.

Líneas	Impedancias Z (p.u.)	$y/2$ (p.u.)
0-2	$0.1j$	—
LA 0-1	$0.1j$	$0.01j$
LB 0-1	$0.1j$	$0.01j$
1-2	$0.1j$	—

Tabla 9.1 Datos de las líneas de la red de la Figura 9.3.

- Determinar los flujos de potencia activa que circulan por las líneas, utilizando el modelo lineal del reparto de cargas en continua (DC-Load Flow).
- Calcular los factores de distribución de la potencia activa para el fallo de la línea LA que une los nudos 0 y 1, y los nuevos flujos de potencia activa que resultarían tras el disparo por fallo de dicha línea.

Resolución

1. Se tomará como nudo de referencia del problema el nudo 0, debido a que tan solo es en este nudo donde se desconocen las potencias inyectadas. En él se establecerá por tanto el origen de ángulos de las tensiones.

La matriz B' del problema activo para el método desacoplado rápido sólo tiene en cuenta las susceptancias de las líneas, resultando ser para este caso:

$$B' = \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$$

Si se utiliza el modelo lineal del reparto de cargas en continua (DC-Load Flow), el sistema a resolver es:

$$B'\theta = P^{\text{esp}} = P_{\text{gen}} - P_{\text{cons}}$$

que para este problema da lugar al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto se tendría el vector de ángulos

$$\theta = \begin{bmatrix} -0.03 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

Para esta solución, se obtienen los siguientes flujos iniciales por las líneas:

$$P_{02}^0 \approx \frac{\theta_0 - \theta_2}{X_{02}} = -0.1$$

$$P_{12}^0 \approx \frac{\theta_1 - \theta_2}{X_{12}} = -0.4$$

$$P_{LA:01}^0 = P_{LB:01}^0 \approx \frac{\theta_0 - \theta_1}{X_{01}} = 0.3$$

En la Figura 9.4 se pueden visualizar mejor estos flujos iniciales obtenidos mediante un reparto de cargas en continua.

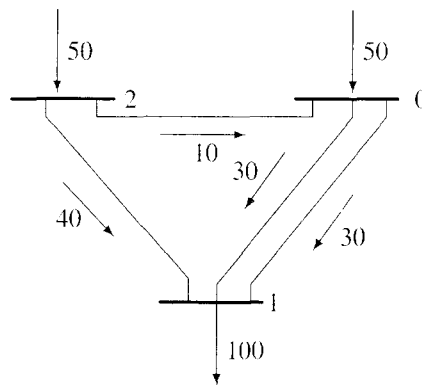


Figura 9.4 Flujos iniciales para la red del Problema 9.1.

2. Los factores de distribución de la potencia activa para un fallo en la línea LA:0-1 se obtienen aplicando compensación al sistema y utilizando el modelo del reparto de cargas en continua anteriormente descrito. De esta forma se obtiene un modelo incremental del sistema de ecuaciones:

$$B'_{LA} \cdot \Delta\theta = \Delta P$$

siendo B'_{LA} la matriz B' del apartado primero pero eliminando de la misma la línea LA:0-1 en la que se produce la contingencia. En cuanto al vector ΔP , para un fallo en dicha línea queda definido por $\Delta P = [-1 \ 0]^T$. El sistema a resolver será:

$$\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resultando, tras añadir el nudo de referencia, el siguiente vector de incrementos de los ángulos

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_0 \\ \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.067 \\ -0.033 \end{bmatrix}$$

A partir de este vector se obtienen los factores de distribución en las diferentes líneas, que permitirán obtener los nuevos flujos por las mismas en función de los flujos iniciales.

$$\rho_{02} = \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_2}{X_{02}} = 0.333$$

$$\rho_{LB:01} = \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1}{X_{01}} = 0.667$$

$$\rho_{12} = \frac{\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2}{X_{12}} = -0.333$$

Teniendo en cuenta la potencia que circulaba por la línea LA:0-1 antes del fallo, $P_{LA:01}^0 = 0.3$, las nuevas potencias estimadas en el resto de las líneas tras el fallo son:

$$P_{02} = P_{02}^0 + \rho_{02} \cdot P_{LA:01}^0 = 0$$

$$P_{LB:01} = P_{LB:01}^0 + \rho_{LB:01} \cdot P_{LA:01}^0 = 0.5$$

$$P_{12} = P_{12}^0 + \rho_{12} \cdot P_{LA:01}^0 = -0.5$$

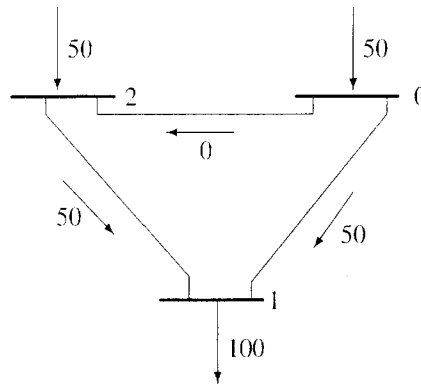


Figura 9.5 Flujos tras el fallo de LA:0-1 para la red del Problema 9.1.

Esta estimación de flujos se muestra en la Figura 9.5.

En este ejemplo no destaca la ventaja de los factores de distribución frente a la solución directa. En un problema de mayor tamaño se podría observar cómo en el vector de la derecha ΔP , en el sistema $B'_{LA} \cdot \Delta\theta = \Delta P$, sólo aparecen dos elementos no nulos, pudiéndose aplicar técnicas de vectores dispersos que resultan más rápidas que resolver de nuevo el problema.

9.2. De la red de la Figura 9.6 se conocen los datos (en p.u.) indicados en las Tablas 9.2 y 9.3.

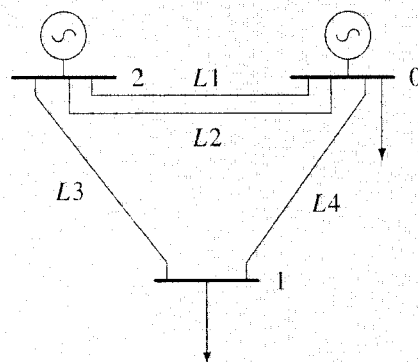


Figura 9.6 Red del Problema 9.2.

Líneas	Impedancias Z (p.u.)	$y/2$ (p.u.)
L1:0-2	$0 + 0.05j$	0
L2:0-2	$0 + 0.05j$	0
L3:2-1	$0.01 + 0.01j$	0.03j
L4:0-1	$0.01 + 0.01j$	0.03j

Tabla 9.2 Datos de las líneas de la red de la Figura 9.6.

Nudo	P_{gen}	Q_{gen}	P_{cons}	Q_{cons}
N0	1.00	?	1.92	0.00
N1	0.00	0.00	1.00	0.50
N2	?	?	0.00	0.00

Tabla 9.3 Datos de las potencias inyectadas en los nudos del Problema 9.2.

Tomando el nudo 2 como nudo de referencia de la red:

1. Determinar los flujos de potencia activa por las líneas, utilizando un modelo lineal de las ecuaciones nodales (DC-Load Flow).
2. Aplicar el método de factores de distribución para calcular los nuevos flujos de potencia activa por las líneas en las siguientes contingencias:
 - a) Pérdida del generador del nudo 0.
 - b) Pérdida de la línea L1:0-2.

Resolución

1. La matriz B' de este problema, adoptando el nudo 2 como el de referencia tal como se indica, sería:

$$B' = \begin{bmatrix} 140 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a los datos de los consumos e inyecciones en cada nudo, se ha de resolver el sistema,

$$\begin{bmatrix} 140 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1.92 \\ -1 \end{bmatrix}$$

que una vez resuelto da lugar al siguiente vector de ángulos, tras incorporar el de referencia:

$$\theta = \begin{bmatrix} -0.016 \\ -0.013 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para esta solución, se obtienen los siguientes flujos por las líneas:

$$P_{02}^{L1} = P_{02}^{L2} \approx \frac{\theta_0 - \theta_2}{X_{02}} = -0.316$$

$$P_{12}^{L3} \approx \frac{\theta_1 - \theta_2}{X_{12}} = -1.289$$

$$P_{01}^{L4} \approx \frac{\theta_0 - \theta_1}{X_{01}} = -0.289$$

En la Figura 9.7 se muestran estos flujos iniciales.

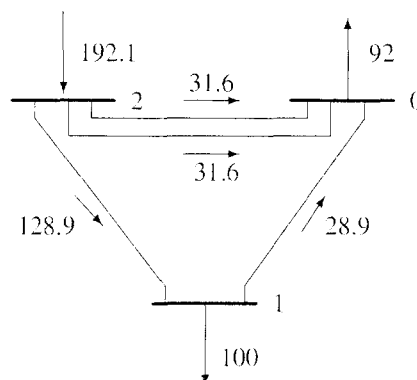


Figura 9.7 Flujos iniciales para la red del Problema 9.2.

2.a. Los factores de distribución para contingencias en el generador del nudo 0 se obtienen resolviendo

$$\begin{bmatrix} 140 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_0 \\ \Delta\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución da lugar al siguiente vector de incremento en los ángulos:

$$\Delta\theta = \begin{bmatrix} 0.011 \\ 5.556 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

A partir de este vector se obtienen los factores de distribución:

$$\rho_{02}^{L1} = \rho_{02}^{L2} = \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_2}{X_{02}} = 0.222$$

$$\rho_{12}^{L3} = \frac{\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2}{X_{12}} = 0.556$$

$$\rho_{01}^{L4} = \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1}{X_{01}} = 0.556$$

Teniendo en cuenta la potencia que inyectaba el generador en el nudo 0 antes del fallo, $\Delta P_{gen}^0 = -1.0$, las nuevas potencias estimadas en el resto de las líneas tras el fallo son:

$$P_{02}^{L1} = P_{02}^{L2} = P_{02}^{L1}|_0 + \rho_{02}^{L1} \cdot \Delta P_{gen}^0 = -0.538$$

$$P_{12}^{L3} = P_{12}^{L3}|_0 + \rho_{12}^{L3} \cdot \Delta P_{gen}^0 = -0.844$$

$$P_{01}^{L4} = P_{01}^{L4}|_0 + \rho_{01}^{L4} \cdot \Delta P_{gen}^0 = -1.844$$

Estos flujos se muestran en la Figura 9.8.

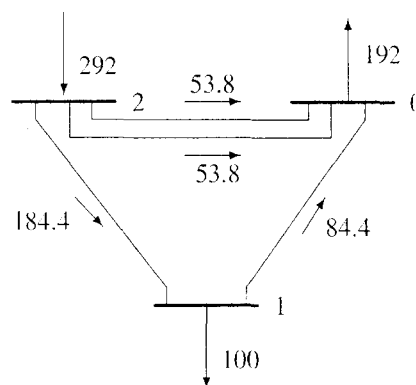


Figura 9.8 Flujos tras el fallo del generador del nudo 0 para la red del Problema 9.2.

2.b. El sistema a resolver para determinar los factores de distribución para contingencias en la línea L1:0-2 cambia más notablemente que en el caso de una contingencia en un generador al modificar la matriz de dicho sistema, a saber:

$$\begin{bmatrix} 120 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_0 \\ \Delta\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \begin{bmatrix} 0.014 \\ 7.143 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Los factores de distribución, y, a partir de ellos, los nuevos flujos en las líneas tras la contingencia en la línea L1:0-2, son:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{02}^{L2} &= \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_2}{X_{02}} = 0.286 \\ \rho_{12}^{L3} &= \frac{\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2}{X_{12}} = 0.714 \\ \rho_{01}^{L4} &= \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1}{X_{01}} = 0.714 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} P_{02}^{L2} &= P_{02}^{L2}|_0 + \rho_{02}^{L2} \cdot P_{02}^{L1}|_0 = -0.406 \\ P_{12}^{L3} &= P_{12}^{L3}|_0 + \rho_{12}^{L3} \cdot P_{02}^{L1}|_0 = -1.514 \\ P_{01}^{L4} &= P_{01}^{L4}|_0 + \rho_{01}^{L4} \cdot P_{02}^{L1}|_0 = -0.514 \end{aligned}$$

Estos flujos se muestran en la Figura 9.9.

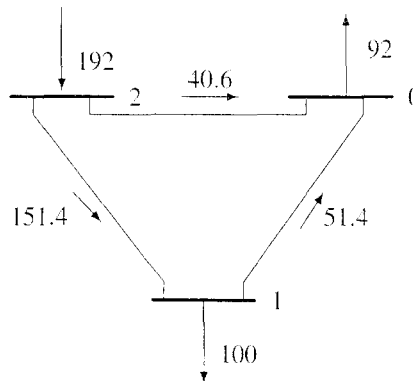


Figura 9.9 Flujos tras el fallo de la línea L1:0-2 para la red del Problema 9.2.

9.3. De la red de la Figura 9.10 se conocen los datos (todos ellos bajo una misma base) indicados en las Tablas 9.4 y 9.5. Determinar:

1. Los flujos de potencia activa que circulan por las líneas, utilizando un modelo lineal aproximado.
2. Sabiendo que la potencia máxima que puede transportar cada línea es de 80 MW, determinar las contingencias de línea críticas para el sistema.

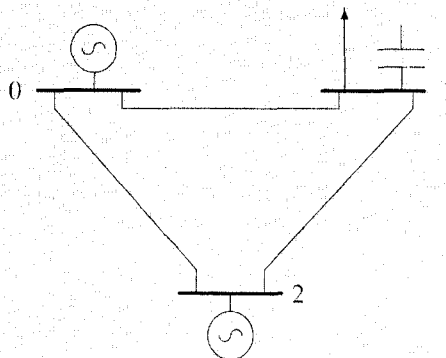


Figura 9.10 Esquema unifilar de la red del Problema 9.3.

Nodos	Ángulos (rad.)	P generada (MW)	P consumida (MW)
0	0	60	0
1	-0.0657	0	100
2	0.0725	60	0

Tabla 9.4 Datos de los nudos de la red de la Figura 9.10.

Líneas	Impedancias en p.u.	y/2 en p.u.
0-1	$0.01 + 0.1j$	0
0-2	$0.25j$	$0.05j$
1-2	$0.5j$	$0.05j$

Tabla 9.5 Datos de los elementos de la red de la Figura 9.10.

Resolución

1. Utilizando el mismo modelo lineal aproximado de problemas anteriores y los datos de los ángulos de la Tabla 9.4, los flujos iniciales, mostrados en la Figura 9.11, son:

$$P_{02}^0 \approx \frac{\theta_0 - \theta_2}{X_{02}} = -0.29$$

$$P_{01}^0 \approx \frac{\theta_0 - \theta_1}{X_{01}} = 0.657$$

$$P_{12}^0 \approx \frac{\theta_1 - \theta_2}{X_{12}} = -0.276$$

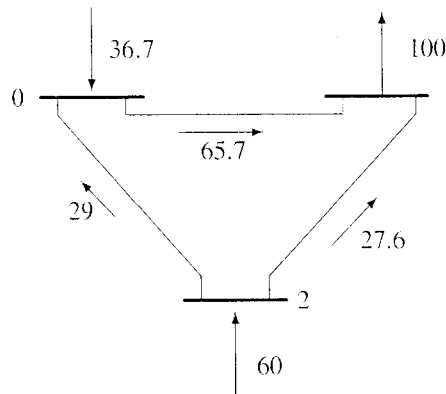


Figura 9.11 Flujos iniciales para la red del Problema 9.3.

Si se realizan los balances de potencia en los nudos se observa como éstos no se producen. La razón es que el vector de ángulo de partida indicado en la Tabla 9.4, se ha obtenido con un método no aproximado y, por tanto, más exacto. Esto impide el perfecto balance de potencias en los nudos, hecho que no ocurriría en los problemas vistos hasta ahora, pues el vector de ángulos de partida se obtenía ya del modelo lineal aproximado.

2. Se van a estudiar las posibles contingencias producidas por fallos en cada una de las líneas de la red bajo estudio aplicando la misma técnica que en los problemas de contingencias resueltos hasta ahora. Los factores de distribución para un fallo en la línea 0-1 se obtienen tras resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución da lugar al siguiente vector de incremento en los ángulos:

$$\Delta\theta = \begin{bmatrix} -0.75 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

A partir de este vector se obtienen los factores de distribución:

$$\rho_{02} = \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_2}{X_{02}} = 1$$

$$\rho_{01} = \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1}{X_{01}} = 7.5$$

$$\rho_{12} = \frac{\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2}{X_{12}} = -1$$

Los nuevos flujos por las líneas tras un fallo en la línea 0-1 quedan por tanto:

$$P_{02} = P_{02}^0 + \rho_{02} \cdot P_{01}^0 = 0.367$$

$$P_{12} = P_{12}^0 + \rho_{12} \cdot P_{01}^0 = -0.933$$

Analizando estos flujos se observa que esta contingencia resulta crítica al superarse en la línea 1-2 el máximo flujo de activa permitido por ella (80 MW). De la misma forma se obtendrían los factores de distribución y los nuevos flujos en las líneas para cada una de las contingencias a analizar. Los resultados para cada contingencia se indican en la Tabla 9.6, pudiéndose visualizar más gráficamente los flujos finales por cada línea en las Figuras 9.12, 9.13 y 9.14.

Contingencia	Factores de distribución	Flujos (MW)
0-1	$\rho_{02} = 1$	$P_{02} = 36.7$
	$\rho_{12} = -1$	$P_{12} = -93.3$
0-2	$\rho_{01} = 1$	$P_{01} = 36.7$
	$\rho_{12} = 1$	$P_{12} = -56.6$
1-2	$\rho_{01} = -1$	$P_{01} = 93.3$
	$\rho_{02} = 1$	$P_{02} = -56.6$

Tabla 9.6 Resultado del análisis de las contingencias en las líneas del Problema 9.3.

Analizando la Tabla 9.6 se puede ver cómo, además de la línea 0-1, también resulta crítica la contingencia en la línea 1-2 al sobrepasar los 80 MW por la línea 0-1 (en concreto, circulan 93.3 MW).

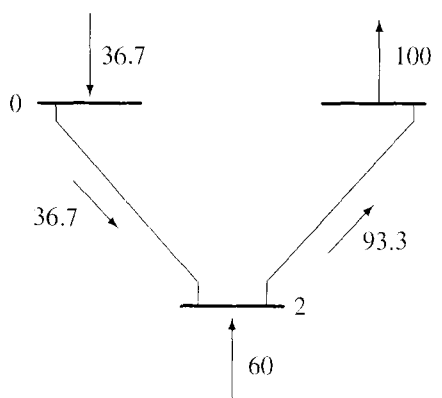


Figura 9.12 Flujos finales para una contingencia en la línea 0-1 del Problema 9.3.

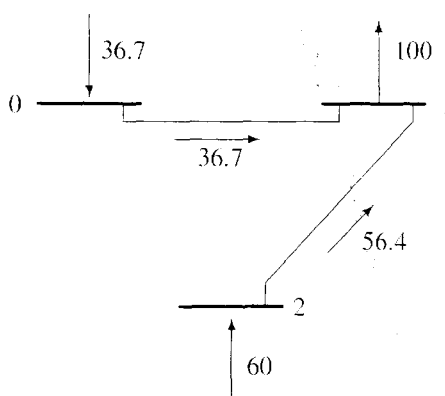


Figura 9.13 Flujos finales para una contingencia en la línea 0-2 del Problema 9.3.

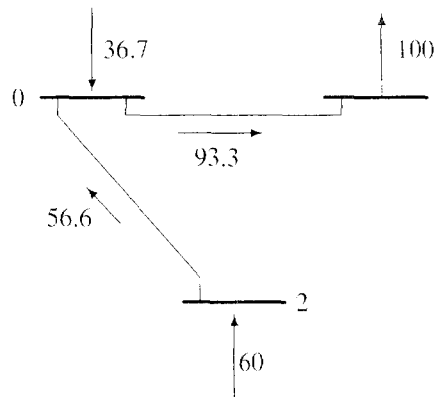


Figura 9.14 Flujos finales para una contingencia en la línea 1-2 del Problema 9.3.

Estas contingencias que dan lugar a la radialidad de la red, obviamente hacen que la resolución del problema de forma directa, mediante el balance de potencias en los nudos, sea indiscutiblemente más simple que el método de los factores de distribución.

9.4. La red de la Figura 9.15 se compone de dos nudos de generación, uno de consumo y una interconexión con otra compañía eléctrica de la cual se importan 20 MW. El resto de los datos de la red se muestran en las Tablas 9.7 y 9.8. La potencia base es de 100 MVA.

Los flujos de activa por las líneas, obtenidos mediante un reparto de cargas, se muestran también en la Figura 9.15. Calcular por el método de los factores de distribución, los nuevos flujos de potencia activa por las líneas tras la pérdida de la interconexión, repartiéndose por igual los 20 MW que ésta aportaba entre los dos generadores.

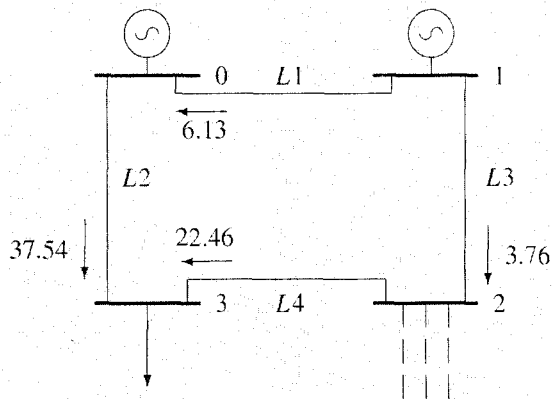


Figura 9.15 Red del Problema 9.4.

Líneas	Impedancias Z (p.u.)
1-0	$0.2 + 0.4j$
1-2	$0.1 + 0.2j$
2-3	$0.2 + 0.4j$
0-3	$0.1 + 0.2j$

Tabla 9.7 Datos de las líneas de la red de la Figura 9.15.

Nudo	P_{gen} MW	Q_{gen} Mvar	P_{cons} MW	Q_{cons} Mvar	V (p.u.)
0	33.5	29.7	0.0	0.0	1.02
1	10.0	-2.56	0.0	0.0	1.02
2	20.0	10.0	0.00	0.00	-
3	0.0	0.0	60.0	30.0	-

Tabla 9.8 Datos de las potencias inyectadas en los nudos del Problema 9.4.

Resolución

La matriz B' del problema, tomando el nudo 0 como nudo de referencia, vale:

$$B' = \begin{bmatrix} 7.5 & -5 & 0 \\ -5 & 7.5 & -2.5 \\ 0 & -2.5 & 7.5 \end{bmatrix}$$

La potencia se pierde en el nudo 2 y se gana en los nudos 0 y 1. Serán necesarios por tanto, los factores de distribución correspondientes a los nudos 1 y 2 con respecto a todas las líneas (el nudo 0, aunque implicado en la contingencia, se elimina al ser el de referencia).

Los factores de distribución para el nudo 1 son:

$$B' \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{01}^1 = \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1}{X_{01}} = -0.667 \\ \rho_{12}^1 = \frac{\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2}{X_{12}} = 0.333 \\ \rho_{23}^1 = \frac{\Delta\theta_2 - \Delta\theta_3}{X_{23}} = 0.333 \\ \rho_{03}^1 = \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_3}{X_{03}} = -0.333 \end{cases}$$

y para el nudo 2,

$$B' \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{01}^2 = \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1}{X_{01}} = -0.5 \\ \rho_{12}^2 = \frac{\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2}{X_{12}} = -0.5 \\ \rho_{23}^2 = \frac{\Delta\theta_2 - \Delta\theta_3}{X_{23}} = 0.5 \\ \rho_{03}^2 = \frac{\Delta\theta_0 - \Delta\theta_3}{X_{03}} = -0.5 \end{cases}$$

Si los cambios producidos en las potencias inyectadas de los nudos 1 y 2 son:

$$\Delta P_1 = 10 \text{ MW} \quad \Delta P_2 = -20 \text{ MW}$$

la variación de las potencias por las líneas será la superposición de ambos efectos, es decir,

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_{01} &= \Delta P_1 \cdot \rho_{01}^1 + \Delta P_2 \cdot \rho_{01}^2 = 3.333 \\ \Delta P_{12} &= \Delta P_1 \cdot \rho_{12}^1 + \Delta P_2 \cdot \rho_{12}^2 = 13.333 \\ \Delta P_{23} &= \Delta P_1 \cdot \rho_{23}^1 + \Delta P_2 \cdot \rho_{23}^2 = -6.667 \\ \Delta P_{03} &= \Delta P_1 \cdot \rho_{03}^1 + \Delta P_2 \cdot \rho_{03}^2 = 6.667 \end{aligned} \right\}$$

Teniendo en cuenta los flujos iniciales por las ramas, los flujos finales son:

$$P_{01} = -2.797 \quad P_{12} = 17.093 \quad P_{23} = 15.793 \quad P_{03} = 44.207$$

Estos flujos se visualizan en la Figura 9.16.

En la Figura 9.17 se muestran los flujos finales por las líneas tras la contingencia estudiada pero utilizando el método exacto de Newton-Raphson para resolver las ecuaciones. El error que se comete al tomar el modelo lineal aproximado no es importante en este caso, debiéndose fundamentalmente a la no consideración de las resistencias por las líneas.

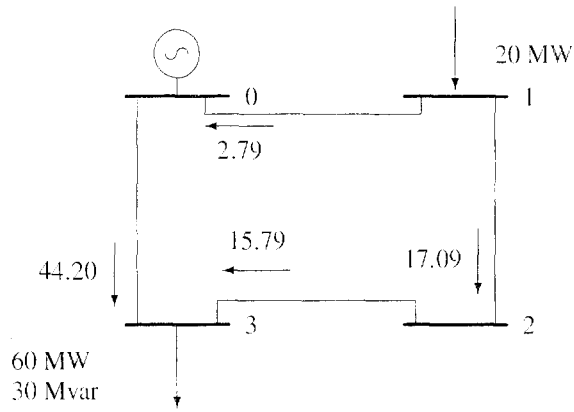


Figura 9.16 Flujos finales del Problema 9.4 mediante factores de distribución.

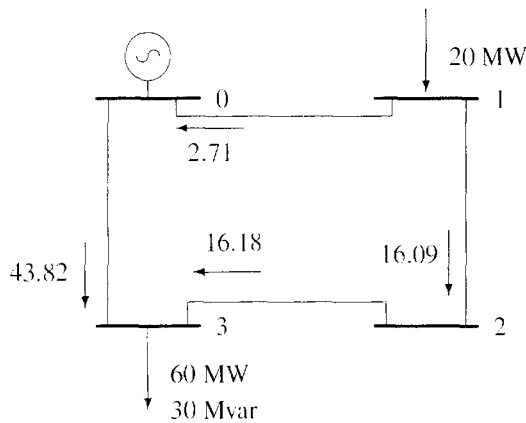


Figura 9.17 Flujos finales del Problema 9.4 mediante un flujo de cargas.

9.5. En la red de la Figura 9.18, con los datos mostrados en las Tablas 9.9 y 9.10, están representados los flujos de potencia activa por las líneas.

Obtener los nuevos flujos de potencia activa tras el fallo de la línea entre los nudos 0 y 3:

1. Mediante factores de distribución.
2. Utilizando un DC-Load Flow.

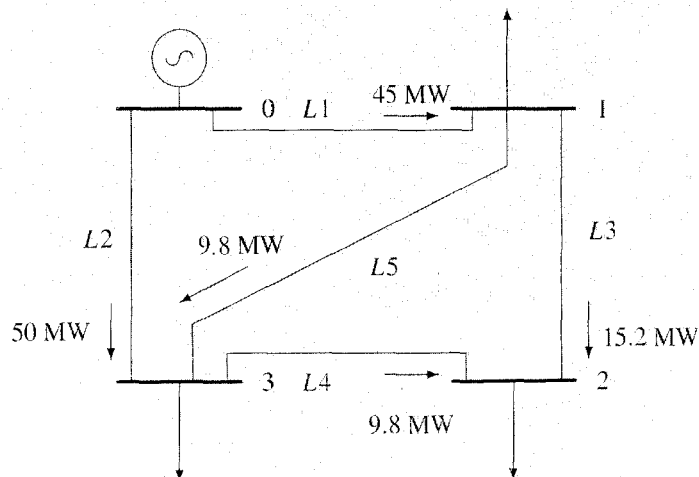


Figura 9.18 Red del Problema 9.5.

Líneas	Impedancias Z (p.u.)
1-0	$0.004j$
1-3	$0.002j$
1-2	$0.004 + 0.004j$
2-3	$0.004 + 0.004j$
0-3	$0.004j$

Tabla 9.9 Datos de las líneas de la red de la Figura 9.18.

Nudo	P_{gen} MW	Q_{gen} Mvar	P_{cons} MW	Q_{cons} Mvar	V (p.u.)
0	?	?	0.0	0.0	1.0
1	0.0	0.0	20.0	10.0	?
2	0.0	0.0	25.0	0.0	?
3	0.0	0.0	50.0	40.0	?

Tabla 9.10 Datos de los nudos de la red del Problema 9.5.

Resolución

1. Utilizar el método de los factores de distribución implica resolver el sistema $B' \Delta \theta = \Delta P$ para el caso concreto de una contingencia en la línea 0-3

$$\begin{bmatrix} 1000 & -250 & -500 \\ -250 & 500 & -250 \\ -500 & -250 & 750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \cdot 10^{-3} \\ -4.8 \cdot 10^{-3} \\ -5.6 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

con lo cual se obtienen los incrementos en los ángulos que permiten determinar los factores de distribución:

$$\begin{cases} \rho_{01} = \frac{\Delta \theta_0 - \Delta \theta_1}{X_{01}} = 1 \\ \rho_{12} = \frac{\Delta \theta_1 - \Delta \theta_2}{X_{12}} = 0.2 \\ \rho_{23} = \frac{\Delta \theta_2 - \Delta \theta_3}{X_{23}} = 0.2 \\ \rho_{13} = \frac{\Delta \theta_1 - \Delta \theta_3}{X_{13}} = 0.8 \end{cases}$$

Con los flujos iniciales de partida y estos factores de distribución, los flujos finales por las líneas son:

$$\begin{aligned} P_{01} &= P_{01}^0 \cdot \rho_{01} + P_{03}^0 = 95.0 \\ P_{12} &= P_{12}^0 \cdot \rho_{12} + P_{03}^0 = 25.2 \\ P_{23} &= P_{23}^0 \cdot \rho_{23} + P_{03}^0 = 0.2 \\ P_{13} &= P_{13}^0 \cdot \rho_{13} + P_{03}^0 = 49.8 \end{aligned}$$

los cuales se muestran gráficamente en la Figura 9.19.

2. Si se utiliza el modelo del reparto de cargas en continua los flujos por las líneas vendrían dados por las expresiones:

$$P_{01} \approx \frac{\theta_0 - \theta_1}{X_{01}} \quad P_{12} \approx \frac{\theta_1 - \theta_2}{X_{12}} \quad P_{23} \approx \frac{\theta_2 - \theta_3}{X_{23}} \quad P_{13} \approx \frac{\theta_1 - \theta_3}{X_{13}}$$

Los ángulos se obtienen de resolver el sistema $B' \cdot \theta = P^{esp}$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 1000 & -250 & -500 \\ -250 & 500 & -250 \\ -500 & -250 & 750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.20 \\ -0.25 \\ -0.50 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.8 \cdot 10^{-3} \\ -4.8 \cdot 10^{-3} \\ -4.8 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

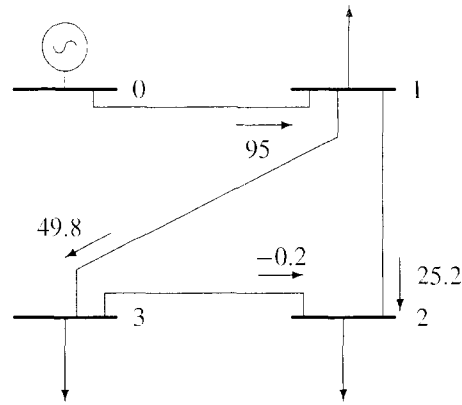


Figura 9.19 Flujos finales del Problema 9.5 mediante factores de distribución.

obteniéndose así los siguientes flujos finales:

$$P_{01} = 0.95 \quad P_{12} = 0.25 \quad P_{23} = 0.0 \quad P_{13} = 0.5$$

mostrados en la Figura 9.20.

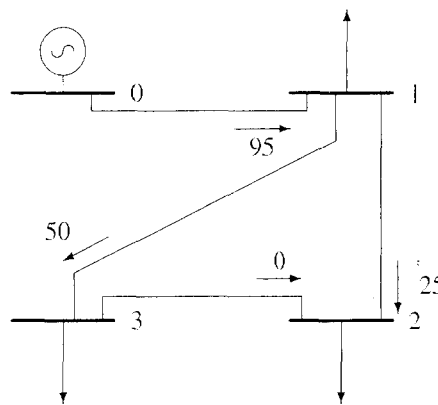


Figura 9.20 Flujos finales del Problema 9.5 mediante el modelo lineal de corriente continua.

La ventaja del método de los factores de distribución frente a la resolución directa del problema utilizando el modelo de reparto de cargas en continua estriba en que aun siendo los dos métodos aproximados, el primero parte de unos flujos iniciales exactos a los que le suma unos aproximados (los dependientes de los factores de distribución), mientras que el segundo estima los flujos finales por las líneas mediante un modelo aproximado que resuelve el problema tras la contingencia.

En la Figura 9.21 se muestran también los flujos finales con una metodología exacta como es la de un reparto de cargas basado en Newton-Raphson. Se puede concluir, a la vista de los resultados y tras un análisis comparativo de los distintos métodos, que los errores de los métodos aproximados con respecto a uno exacto son realmente despreciables, menores incluso que los que se producían en el Problema 9.4 debido a que las resistencias de las líneas son nulas o prácticamente nulas.

9.6. Para la red de la Figura 9.22, con los datos mostrados en las Tablas 9.11 y 9.12 (todos en p.u. y bajo una misma base), calcular:

1. El flujo de potencia activa por la línea 1-3 empleando un reparto de cargas en continua.
2. El nuevo flujo por la línea 1-3 después de la pérdida de la línea 1-2 y el generador del nudo 3, repartiéndose la potencia generada en el nudo 3 entre los nudos 0 y 2 proporcionalmente a la potencia que éstos inyectaban inicialmente. Las dos contingencias se suponen simultáneas e independientes.

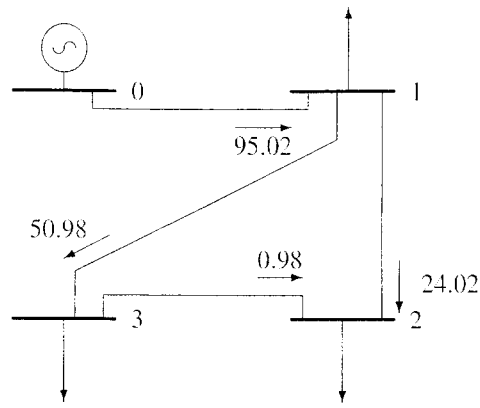


Figura 9.21 Flujos finales del Problema 9.5 mediante un reparto de cargas.

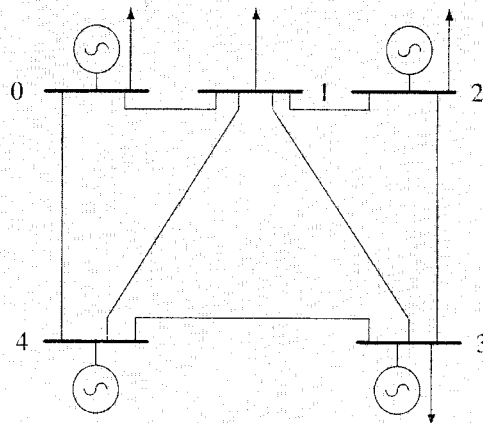


Figura 9.22 Red del Problema 9.6.

Líneas	Impedancias Z
1-0	j
1-2	$5j$
1-3	$4j$
1-4	$3j$
0-4	$2j$
2-3	$7j$
3-4	$6j$

Tabla 9.11 Datos de las líneas de la red de la Figura 9.22.

Nudo	P_{gen}	Q_{gen}	P_{cons}	Q_{cons}
0	0.7	0.0	1.3	0.7
1	0.0	0.0	0.7	0.2
2	0.3	0.0	1.4	0.4
3	1.4	0.5	0.4	0.1
4	?	?	?	?

Tabla 9.12 Datos de las potencias inyectadas en los nudos del Problema 9.6.

Resolución

1. El flujo de activa por la línea 1-3, mediante un reparto de cargas en continua, viene dado por:

$$P_{13} = \frac{\theta_1 - \theta_3}{X_{13}}$$

lo que requiere obtener los ángulos. Éstos se determinan resolviendo el sistema $B'\theta = P^{esp}$, con

$$B' = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} + \frac{1}{5} & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad P^{esp} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ -0.7 \\ -1.1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

habiéndose tomado el nudo 4 como el de referencia al ser el único en el que no se conocen las potencias generadas.

Resolviendo el sistema se tiene el vector de ángulos, incluyendo el de referencia:

$$\theta = \begin{bmatrix} -1.538 \\ -1.775 \\ -4.285 \\ -0.1 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

que permite finalmente obtener el flujo por la línea 1-3, $P_{13} = -0.419$.

2. La nueva matriz B' tras las contingencias a estudiar, resulta de eliminar la línea 1-2 de la matriz utilizada en el apartado anterior (la pérdida del generador no influye en la matriz):

$$B'_{mod} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Se han de obtener, respecto a la línea 1-3, los factores de distribución de la línea 1-2, del nudo 3, del nudo 0 y del nudo 2, que son todos los elementos afectados. En cada caso se ha de resolver el sistema $B'_{mod} \cdot \Delta\theta = \Delta P$, con ΔP el adecuado para cada caso.

En la Tabla 9.13 se muestra para cada caso ΔP , el vector $\Delta\theta$ resultante y los factores de distribución.

Elemento	$[\Delta P_0 \ \Delta P_1 \ \Delta P_2 \ \Delta P_3]^T$	$[\Delta\theta_0 \ \Delta\theta_1 \ \Delta\theta_2 \ \Delta\theta_3]^T$	ρ_{13}
Línea 1-2	$[0 \ 1 \ -1 \ 0]^T$	$[0.348 \ 0.522 \ -9.087 \ -2.087]^T$	0.652
Generador 3	$[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$	$[0.571 \ 0.857 \ 1.571 \ 2.571]^T$	-0.429
Generador 0	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	$[1.238 \ 0.857 \ 0.738 \ 0.571]^T$	0.071
Generador 2	$[0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$	$[0.738 \ 1.107 \ 4.217 \ 1.571]^T$	-0.116

Tabla 9.13 Factores de distribución del Problema 9.6.

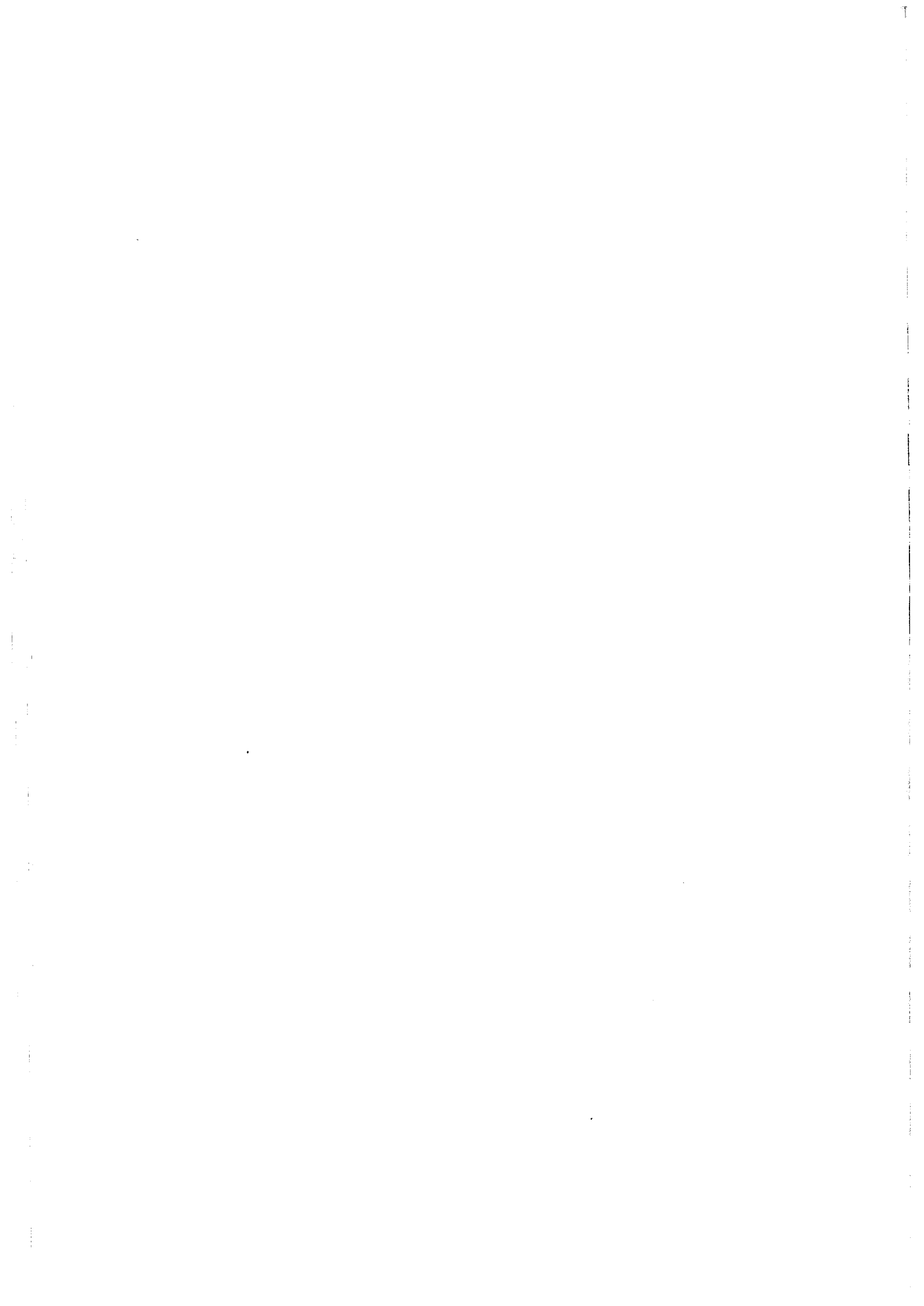
Se han de estimar los flujos iniciales por los elementos afectados por las contingencias con el vector de ángulos que se obtuvo en el primer apartado. Éstos son:

$$P_{12} \approx \frac{\theta_1 - \theta_2}{X_{12}} = 0.502$$

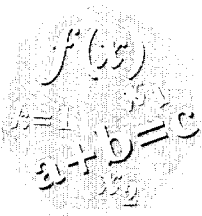
Finalmente el flujo final por la línea 1-3 será:

$$P_{13}^{\text{final}} = P_{13} + \rho_{13}^{12} \cdot P_{12} + \rho_{13}^3 \cdot (-1.4) + \rho_{13}^0 \cdot (1.4 \cdot 0.7) + \rho_{13}^2 \cdot (1.4 \cdot 0.3) = 0.53 \text{ p.u.}$$

Como ha venido ocurriendo en los problemas anteriores, el tamaño tan pequeño de las redes estudiadas hace que la aplicación de la técnica de factores de distribución resulte larga y complicada. También en este problema sería mucho más directo aplicar un reparto de cargas en continua, ya que se conocen las potencias especificadas en cada nudo tras la pérdida del generador en 3.



PROGRAMACIÓN DE LA GENERACIÓN



En este capítulo se realiza una introducción a la problemática asociada a la determinación de los programas de generación de las centrales eléctricas. Para ello, se revisan los conceptos básicos asociados a los costes de generación y se plantean las dos preguntas que resumen la temática del capítulo: ¿qué centrales van a estar en servicio en cada momento? ¿Cuánto debe generar cada central para minimizar los costes?

Este problema, fundamental para el correcto funcionamiento de un sistema eléctrico teniendo en cuenta que en cada momento se debe suministrar la demanda más las pérdidas en el sistema, es objeto de distintos planteamientos dependiendo del horizonte temporal y del objetivo concreto perseguido:

- Largo plazo
 - Planificación de los recursos de generación térmica e hidráulica.
 - Planificación de mantenimientos.
- Corto-medio plazo
 - Planificación de arranques y paradas de centrales térmicas.
 - Coordinación hidrotérmica a corto plazo.
 - Despacho económico.

En la anterior clasificación, el *despacho económico clásico* aparece como la herramienta básica que permite introducir una serie de conceptos utilizados en el resto de problemas. Por ello, se estudiará con más detalle el *despacho económico clásico*, realizando a continuación una breve introducción a los problemas de programación a corto plazo de las centrales térmicas, problema conocido como *coordinación de arranques y paradas* (*unit commitment* en terminología inglesa), y de utilización de los recursos hidráulicos o *coordinación hidrotérmica*.

El problema del *despacho económico clásico* consiste en determinar la potencia que debe suministrar cada generador en servicio para una demanda determinada P_D , con el objetivo de minimizar el coste total de generación. Para ello, es necesario conocer una de las siguientes curvas características de cada central.

- Curva de costes de cada generador i (€/h):

$$C_i(P_{G_i}) = \alpha_i + \beta_i \cdot P_{G_i} + \gamma_i \cdot P_{G_i}^2$$

donde se ha supuesto que la curva de costes es una función cuadrática de la potencia generada.

- Curva de costes incrementales (€/MWh):

$$CI_i(P_{G_i}) = \frac{\partial C_i}{\partial P_{G_i}} = \beta_i + 2 \cdot \gamma_i \cdot P_{G_i}$$

El problema de optimización que minimiza los costes de generación es el siguiente:

$$\text{Minimizar } C_T(P_{G_i}) = \sum_{i=1}^g C_i(P_{G_i})$$

$$\text{Sujeto a } \sum_{i=1}^g P_{G_i} = P_D$$

Planteando la *función lagrangiana* del problema de optimización:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^g C_i(P_{G_i}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^g P_{G_i} - P_D \right)$$

El óptimo implica la igualdad de costes incrementales de los generadores en servicio junto al balance de potencias:

$$CI_i = \frac{\partial C_i}{\partial P_{G_i}} = \lambda \quad i = 1, \dots, g$$

$$P_D = \sum_{i=1}^g P_{G_i}$$

Las condiciones para el despacho óptimo de la generación tienen una interpretación inmediata, como se muestra en la Figura 10.1: si dos generadores trabajan con costes incrementales distintos (pendiente de la curva de costes en el punto de trabajo), siempre es posible realizar una reasignación de las potencias de un generador a otro obteniendo una disminución del coste total de generación, al ser el incremento del coste del generador que trabaja a menor coste incremental menor que la disminución del coste que sufre el generador con mayor coste incremental. Esto no sería posible si todos los generadores tuvieran el mismo coste incremental.

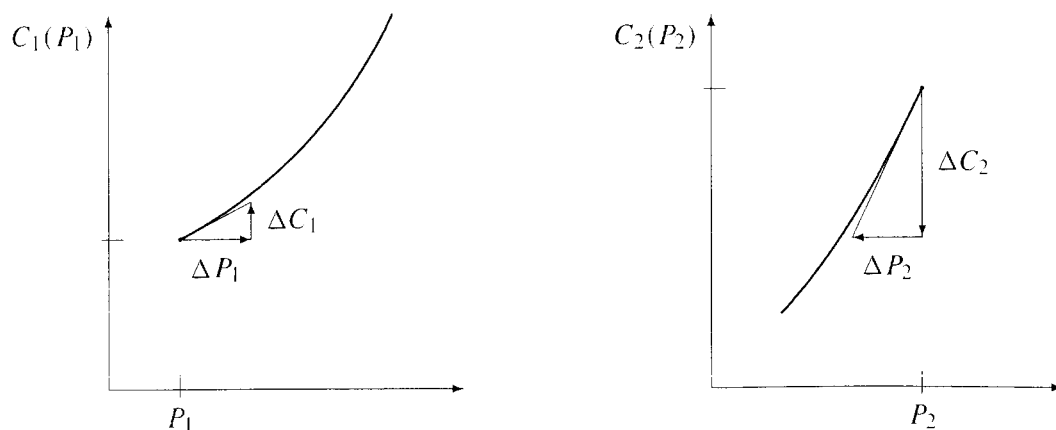


Figura 10.1 Ejemplo de reasignación óptima de la generación.

En lo que respecta al *multiplicador de Lagrange*, λ , tiene una interpretación económica fundamental: si un sistema en el que todos los generadores trabajan en despacho económico sufre un incremento de demanda, λ proporciona el incremento del coste de explotación o *coste incremental del sistema*.

LÍMITES DE GENERACIÓN

Los límites de generación, respectivamente el mínimo técnico y la potencia máxima del grupo generador, aportan restricciones adicionales al problema de optimización que, en la práctica, resulta en la no igualdad de costes incrementales cuando algún generador alcanza un límite.

En consecuencia, para una demanda concreta, podrán coexistir en despacho económico generadores trabajando a coste incremental superior al del sistema (con potencia mínima), coste incremental inferior al del sistema (con potencia máxima), y coste incremental igual al del sistema.

INFLUENCIA DE LAS PÉRDIDAS

La consideración de las pérdidas de potencia en el transporte, dependientes de la potencia generada en cada central, implica un término adicional en el balance de potencias, quedando el problema de optimización en la forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } C_T(P_{G_i}) &= \sum_{i=1}^g C_i(P_{G_i}) \\ \text{Sujeto a } \sum_{i=1}^g P_{G_i} &= P_D + P_p(P_1, \dots, P_g) \end{aligned}$$

donde P_p representa las pérdidas.

Las ecuaciones de optimalidad implican ahora la igualdad de costes incrementales de los generadores, pero afectados de un factor de penalización que depende de las *pérdidas incrementales* del generador:

- PIT_i : pérdidas incrementales de cada generador:

$$PIT_i = \frac{\partial P_p}{\partial P_{G_i}}$$

- L_i : factor de penalización de cada generador:

$$L_i = \frac{1}{1 - PIT_i}$$

El óptimo queda definido por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} C I_i \cdot L_i &= \lambda \quad i = 1, \dots, g \\ \sum_{i=1}^g P_{G_i} &= P_D + P_p(P_1, \dots, P_g) \end{aligned}$$

Obsérvese que λ continúa siendo el *coste incremental del sistema*, es decir, el aumento de coste para un aumento de demanda de 1 MW, teniendo en cuenta las pérdidas en la red.

CÁLCULO DE LAS PÉRDIDAS INCREMENTALES DE CADA GENERADOR

El cálculo de las PIT de cada generador no es tarea fácil, existiendo dos formas distintas de plantear el problema: a través de una *ecuación de pérdidas* obtenida por métodos empíricos, y utilizando las *ecuaciones nodales* del sistema eléctrico.

Cálculo de los coeficientes de pérdidas incrementales mediante la ecuación de pérdidas (coeficientes β)

El método de la ecuación de pérdidas consiste en obtener, a partir de datos históricos del sistema eléctrico o de múltiples estudios del mismo, una ecuación cuadrática de las pérdidas en función de las potencias

generadas:

$$P_p = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g P_{G_i} \cdot \beta_{ij} \cdot P_{G_j}$$

Conocidos los coeficientes β_{ij} de la ecuación de pérdidas, las pérdidas incrementales de transmisión vendrán dadas por:

$$PIT_i = \frac{\partial P_p}{\partial P_{G_i}} = 2 \cdot \sum_{j=1}^g \beta_{ij} \cdot P_{G_j}$$

Cálculo de los coeficientes de pérdidas incrementales mediante las ecuaciones nodales

Los coeficientes de pérdidas incrementales pueden obtenerse de las ecuaciones que proporcionan el balance de potencia en los n nudos eléctricos:

$$P_i = \sum_{j=1}^n V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad i = 1, \dots, n$$

Teniendo en cuenta que la fase del nudo de referencia es constante ($\theta_1 = 0$), se tiene, en forma incremental:

$$P_p = \sum_{i=1}^n (P_{G_i} - P_{D_i}) \implies \Delta P_p = \sum_{i=1}^n \Delta P_{G_i}$$

Introduciendo las ecuaciones nodales, también en forma incremental, y suponiendo constantes las tensiones, resulta:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \theta_2 \\ \vdots \\ \Delta \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta P_{G_2} \\ \vdots \\ \Delta P_{G_n} \end{pmatrix} \implies B \cdot \Delta \theta = \Delta P_G$$

y para el generador de referencia

$$\Delta P_{G_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \theta_2 \\ \vdots \\ \Delta \theta_n \end{pmatrix} = C^T \cdot \Delta \theta$$

Por tanto, se tiene que:

$$\Delta P_p = \Delta P_{G_1} + \sum_{i=2}^n \Delta P_{G_i} = C^T B^{-1} \Delta P_G + I^T \Delta P_G = \{C^T B^{-1} + I^T\} \Delta P_G$$

donde I es un vector columna de unos, de dimensión $n - 1$.

Las distintas componentes del vector $C^T B^{-1} + I^T$ proporcionan los coeficientes de pérdidas incrementales, $PIT_i \simeq \Delta P_p / \Delta P_{G_i}$, siendo característicos de un determinado estado del sistema, por lo que deberán ser recalculados cuando cambie la demanda o la propia generación.

Nótese que, al asumir el generador de referencia cualquier cambio en la generación y en las propias pérdidas, las pérdidas incrementales de dicho generador son $PIT_i = 0$, marcando, por tanto, el umbral entre generadores que se verán penalizados ($PIT_k \geq 0$) y bonificados ($PIT_k \leq 0$) por su localización en la red.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Las ecuaciones que proporcionan el despacho económico de los generadores son, generalmente, no lineales, debiendo utilizarse un algoritmo iterativo para su resolución. Únicamente si las curvas de costes son cuadráticas, aproximación bastante habitual en la práctica, y no se considera una ecuación de pérdidas, el sistema de ecuaciones a resolver es lineal.

No obstante, de la interpretación de λ como coste marginal del sistema se deriva un algoritmo iterativo muy utilizado en las implementaciones prácticas del despacho económico:

1. Dada la demanda P_D , elegir valores iniciales de P_{G_i} .
2. Calcular los PIT_i de cada generador.
3. Elegir un λ inicial (€/MWh).
 - (a) Determinar la potencia de cada generador i de $L_i \cdot CI_i = \lambda$.
 - (b) Dependiendo del error en el balance de potencias:

$$\sum_i P_{G_i} < P_D \implies \text{Incrementar } \lambda$$

$$\sum_i P_{G_i} > P_D \implies \text{Decrementar } \lambda$$

- (c) Si el error en el balance de potencias del sistema no es despreciable, $|\sum_i P_{G_i} - P_D| < \epsilon$, volver a (a).
4. Si los cambios en las potencias son relativamente pequeños, terminar. En caso contrario, volver a 2.

El problema de la programación de arranques y paradas de centrales térmicas o *unit commitment* consiste en determinar qué centrales van a estar en servicio y cuánto van a generar en cada período con el objeto de optimizar los costes de producción, teniendo en cuenta la evolución de la demanda a cubrir por las centrales térmicas a lo largo del horizonte de programación.

Suponiendo que el horizonte de programación es de 24 horas y que existen n_g generadores térmicos, la función de costes a optimizar se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{Minimizar } \sum_{g=1}^{n_g} \left\{ A_g + \sum_{t=1}^{24} C_{g,t}(P_{g,t}) \right\}$$

donde $C_{g,t}$ es el coste de generación del generador g en la hora t , función de la potencia media generada en dicha hora $P_{g,t}$, y A_g es la suma de otros costes en que incurre el generador g , típicamente costes de arranque y parada de la central.

Las restricciones que debe cumplir el problema de optimización se pueden clasificar en dos grupos: restricciones impuestas por el sistema eléctrico y restricciones particulares de cada central.

- Restricciones globales
 - Balance energético en cada período:

$$P_{D_t} = \sum_{g=1}^{n_g} P_{g,t} \quad t = 1, \dots, 24$$

siendo P_{D_t} la potencia media demandada durante cada hora.

- Restricciones de *reserva rodante* o margen disponible de generación en servicio para hacer frente a imprevistos:

$$P_{D_t} + R_t \leq \sum_{g=1}^{n_g} P_g^{\text{máx}} \cdot U_{g,t} \quad t = 1, \dots, 24$$

donde R_t es el margen de reserva requerido en cada hora, P_g^{\max} es la potencia máxima de cada generador y $U_{g,t}$ es una variable binaria ($U_{g,t} \in [0, 1]$) que indica el estado (parada, en servicio) del generador en cada hora.

- Restricciones particulares
 - Potencias máxima y mínima de cada central:

$$P_g^{\min} \cdot U_{g,t} \leq P_{g,t} \leq P_g^{\max} \cdot U_{g,t} \quad t = 1, \dots, 24$$

Nótese que es necesario introducir el estado del generador en la ecuación anterior para asegurar que los límites únicamente están activos en los períodos en los que el generador está en servicio.

- Restricciones al cambio de potencia entre períodos:

$$-\Delta P_g^{\text{bajar}} \leq P_{g,t} - P_{g,t-1} \leq \Delta P_g^{\text{subir}} \quad t = 1, \dots, 24$$

siendo $\Delta P_g^{\text{bajar}}$ y $\Delta P_g^{\text{subir}}$ los máximos cambios posibles entre las potencias medias de dos intervalos consecutivos cuando el generador disminuye o aumenta su potencia, respectivamente.

- Restricciones energéticas asociadas a la central, típicamente:
 - * Consumo de una cuota mínima contratada de combustible

$$F_g \leq \sum_{t=1}^{24} Q_{g,t}(P_{g,t})$$

con $Q_{g,t}(P_{g,t})$ la función que proporciona el consumo de combustible necesario para una determinada potencia (en m^3/h o t/h), y F_g el total de combustible a consumir (m^3 o t).

- * Límite a las emisiones de contaminantes

$$E_g \geq \sum_{t=1}^{24} E_{g,t}(P_{g,t})$$

siendo $E_{g,t}(P_{g,t})$ la emisión de contaminantes para una determinada potencia, y E_g el límite asignado a la central en el horizonte de programación.

Como se ha puesto de manifiesto, la programación de centrales térmicas no es un problema fácil de resolver debido a que involucra variables binarias de decisión (estado de la central, decisión de arrancar o parar, etc.), debiendo abordarse mediante técnicas adecuadas de optimización con variables discretas.

La programación de las centrales hidroeléctricas, problema conocido como *coordinación hidrotérmica*, se ha resuelto tradicionalmente de forma desacoplada de la programación de centrales térmicas, debido a las particularidades concretas de cada tipo de central. No obstante, ambos problemas deben estar coordinados pues los dos tipos de centrales, térmicas e hidráulicas, participan finalmente en la cobertura de la demanda.

En este sentido, la *coordinación hidrotérmica* determina, conocida la energía total disponible para generación en centrales hidroeléctricas, qué fracción de la demanda se va a cubrir mediante dichas centrales en cada intervalo del horizonte de programación, siempre con el objetivo de reducir al máximo los costes de generación.

A efectos de simplificar el problema y desacoplarlo completamente de la programación de centrales térmicas, es habitual trabajar con una *curva de costes del parque térmico* en función de la potencia cubierta mediante generación térmica, $C_T(P_T)$. En consecuencia, suponiendo que el horizonte de programación

es de 24 horas y que existen n_g generadores térmicos y n_h generadores hidráulicos, la función de costes a optimizar se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{Minimizar } \sum_{g=1}^{n_g} \left\{ A_g + \sum_{t=1}^{24} C_{g,t}(P_{g,t}) \right\} \simeq \sum_{t=1}^{24} C_{T_t}(P_{T_t})$$

Las restricciones que debe cumplir el problema de optimización de las centrales hidráulicas son las siguientes:

- Balance energético en cada período

$$P_{D_t} = P_{T_t} + \sum_{h=1}^{n_h} P_{h,t} \quad t = 1, \dots, 24$$

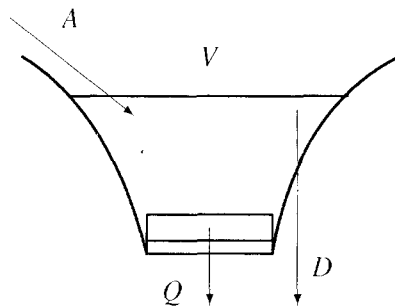
- Restricciones particulares de cada central hidráulica
 - Potencias máxima y mínima de cada central:

$$P_h^{\min} \leq P_{h,t} \leq P_h^{\max} \quad t = 1, \dots, 24$$

- Energía embalsada disponible en el horizonte de programación:

$$V_h \geq \sum_{t=1}^{24} P_{h,t}$$

siendo V_h la energía total disponible en MWh.



V : volumen de agua embalsada en hm^3 .
 A : aportaciones externas en hm^3/h .
 D : caudal excedente en hm^3/h .
 Q : caudal utilizado por la central en hm^3/h .

Figura 10.2 Variables asociadas a una central hidroeléctrica.

Un modelo más detallado de las centrales hidráulicas es el que se muestra en la Figura 10.2, modelo que proporciona la siguiente ecuación para cada embalse:

$$V_{h,t} = V_{h,t-1} + A_{h,t} - D_{h,t} - Q_{h,t}(P_{h,t})$$

donde

- $V_{h,t}$: es el volumen de agua en el embalse asociado a la central h en el intervalo t , sujeto a límites $V_h^{\max} \geq V_{h,t} \geq V_h^{\min}$.
- $A_{h,t}$: son las aportaciones externas al embalse en el intervalo t , aportaciones que se suponen conocidas o estimadas *a priori*.
- $D_{h,t}$: es el caudal vertido por el embalse en el intervalo t , caudal excedente que no es aprovechado para generación eléctrica. Puede estar sujeto a límites $D_h^{\max} \geq D_{h,t} \geq D_h^{\min}$.
- $Q_{h,t}$: es el caudal medio utilizado por la central h en el intervalo t , con límites $Q_h^{\max} \geq Q_{h,t} \geq Q_h^{\min}$. El caudal será función de la potencia media generada $P_{h,t}$.

Por otra parte, muchas veces es necesario modelar el acoplamiento existente entre embalses de una misma cuenca, como se muestra en la Figura 10.3. En este caso, la ecuación que modela cada embalse es la siguiente:

$$V_{h,t} = V_{h,t-1} + A_{h,t} - D_{h,t} - Q_{h,t}(P_{h,t}) + \sum_{e \in \mathcal{C}_h} \{ Q_{e,t-\tau_e}(P_{e,t-\tau_e}) + D_{e,t-\tau_e} \}$$

siendo \mathcal{C}_h el conjunto de embalses aguas arriba del embalse h , y τ_e el tiempo que tarda el caudal vertido por la central e en estar disponible en el embalse h .

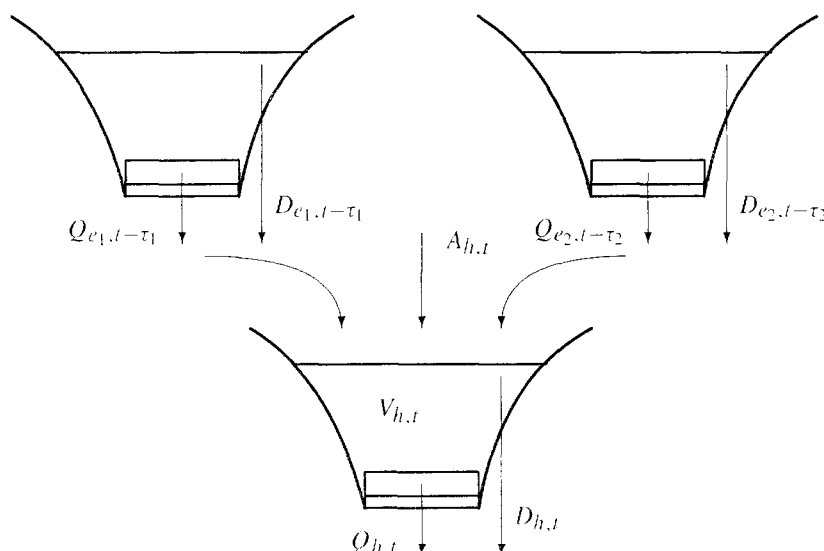
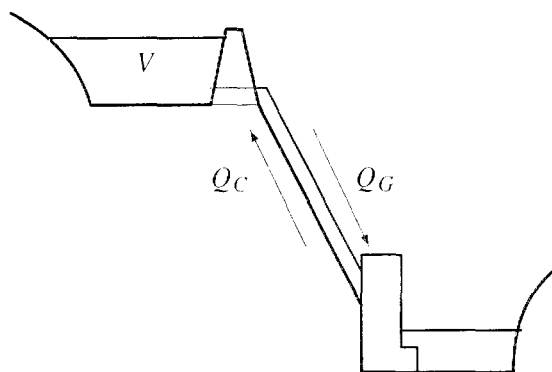


Figura 10.3 Centrales hidroeléctricas de una misma cuenca.

Mención aparte merecen las centrales de bombeo, centrales que tienen capacidad de funcionar como bombas para almacenar energía en forma de agua embalsada (Figura 10.4).



V : volumen de agua embalsada en hm^3 .
 Q_G : caudal en generación en hm^3/h .
 Q_C : caudal en bombeo en hm^3/h .

Figura 10.4 Variables asociadas a una central de bombeo puro.

En el caso de las centrales de bombeo puro (centrales cuya única aportación apreciable al agua embalsada es la bombeada por la propia central), la ecuación de continuidad del agua embalsada, utilizando el subíndice b para las centrales de bombeo, sería la siguiente:

$$V_{b,t} = V_{b,t-1} - Q_{G_{b,t}}(P_{G_{b,t}}) + Q_{C_{b,t}}(P_{C_{b,t}})$$

siendo necesario diferenciar las curvas características que proporcionan el caudal turbinado en función de la potencia generada por la central, $Q_{G_{b,t}}(P_{G_{b,t}})$, y el caudal bombeado en función de la potencia

consumida por la central, $Q_{C_{b,t}}(P_{C_{b,t}})$. Obviamente, el balance energético en cada período deberá incluir tanto la generación como el consumo de las centrales de bombeo:

$$P_{D,t} = P_{T,t} + \sum_{h=1}^{n_h} P_{h,t} + \sum_{b=1}^{n_b} (P_{G_{b,t}} - P_{C_{b,t}}) \quad t = 1, \dots, 24$$

La programación de las centrales hidráulicas es un problema de optimización lineal o no lineal, dependiendo de las funciones utilizadas para modelar tanto el coste de las centrales térmicas como las características caudal/potencia de las centrales hidráulicas, complicándose en gran medida cuando existen acoplamientos hidráulicos entre centrales de una misma cuenca hidrográfica.

PROBLEMAS RESUELTOS

10.1. Dos generadores térmicos, cuyas curvas de costes son:

$$C_1(P_{G_1}) = 426.73 + 10.76P_{G_1} + 0.0031P_{G_1}^2 \text{ €/h} \quad 200 \leq P_{G_1} \leq 500$$

$$C_2(P_{G_2}) = 369.39 + 12.11P_{G_2} + 0.0010P_{G_2}^2 \text{ €/h} \quad 200 \leq P_{G_2} \leq 500$$

trabajan de forma coordinada repartiéndose la generación en despacho económico. Determinar las potencias óptimas para unas demandas de 450, 800 y 950 MW.

Resolución

Las condiciones para el despacho económico de los 2 generadores implican la igualdad de costes incrementales:

$$CI_1 = CI_2 = \lambda \implies 10.76 + 2 \cdot 0.0031P_{G_1} = 12.11 + 2 \cdot 0.0010P_{G_2}$$

junto a la demanda total a satisfacer, $P_D = P_{G_1} + P_{G_2}$.

Demanda de 450 MW: resolviendo las ecuaciones anteriores para $P_D = 450$ MW, se obtiene

$$P_{G_1} = 274.39 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 175.61 \text{ MW} \quad \lambda = 12.46 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación $C_T = C_1 + C_2 = 6139.43 \text{ €/h}$.

Obviamente, la anterior solución no es válida pues no cumple con el mínimo técnico del generador 2. En consecuencia, asignando a dicho generador la potencia marcada por el límite superado, $P_{G_2} = 200$ MW, la solución correcta sería:

$$P_{G_1} = 250 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 200 \text{ MW} \quad \lambda = 12.31 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación, en este caso, $C_T = C_1 + C_2 = 6141.87 \text{ €/h}$.

Cabe destacar que el generador que ha llegado al límite inferior queda trabajando a un coste incremental superior al del sistema ($CI_2 = 12.51 \text{ €/MWh}$), siendo éste marcado por el generador que aún tiene capacidad de maniobra ($\lambda = CI_1 = 12.31 \text{ €/MWh}$). Asimismo, y como es lógico, la consideración del límite inferior supone un coste para el sistema respecto al óptimo sin considerar límites.

Demanda de 800 MW: resolviendo las condiciones de optimalidad para $P_D = 800$ MW, se obtiene en este caso

$$P_{G_1} = 359.76 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 440.24 \text{ MW} \quad \lambda = 12.99 \text{ €/MWh}$$

solución válida al estar ambos generadores entre los límites correspondientes. El coste total de operación resulta ahora $C_T = C_1 + C_2 = 10593.48 \text{ €/h}$.

Demanda de 950 MW: el reparto óptimo de la generación resulta ahora

$$P_{G_1} = 396.34 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 553.66 \text{ MW} \quad \lambda = 13.22 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación $C_T = 12559.07 \text{ €/h}$.

En este caso, la solución óptima no es válida al superar el generador 2 su potencia máxima. Asignando a dicho generador $P_{G_2} = 500 \text{ MW}$, la solución correcta sería ahora:

$$P_{G_1} = 450 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 500 \text{ MW} \quad \lambda = 13.55 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación de 12570.87 €/h .

Nótese cómo el generador que ha llegado al límite superior queda trabajando a un coste incremental inferior al del sistema ($C_{I_2} = 13.11 \text{ €/MWh}$ frente a $\lambda = C_{I_1} = 13.55 \text{ €/MWh}$), lo cual supone un sobre coste para el sistema respecto al óptimo teórico (12570.87 €/h frente a 12559.07 €/h).

- 10.2.** Los dos generadores térmicos del Problema 10.1 deben suministrar una demanda de 950 MW en el sistema de la Figura 10.5.

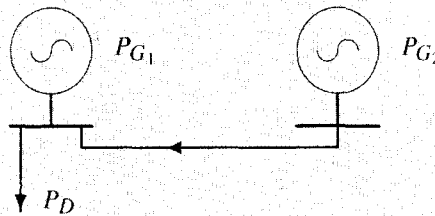


Figura 10.5 Sistema eléctrico del Problema 10.2.

Las curvas de costes son:

$$C_1(P_{G_1}) = 426.73 + 10.76P_{G_1} + 0.0031P_{G_1}^2 \text{ €/h} \quad 200 \leq P_{G_1} \leq 500$$

$$C_2(P_{G_2}) = 369.39 + 12.11P_{G_2} + 0.0010P_{G_2}^2 \text{ €/h} \quad 200 \leq P_{G_2} \leq 500$$

y las pérdidas en la línea de transporte se pueden expresar como $P_p = 0.00005P_{G_2}^2 \text{ MW}$, con P_{G_2} también en MW.

Determinar el despacho económico de ambos generadores en las siguientes condiciones:

1. Sin penalizar los generadores por las pérdidas en el sistema.
2. Penalizando los generadores por las pérdidas en el sistema.

Resolución

En condiciones de despacho económico se debe cumplir la igualdad de costes incrementales, teniendo en cuenta las posibles penalizaciones por pérdidas:

$$\lambda = L_1 \cdot (10.76 + 2 \cdot 0.0031 P_{G_1}) = L_2 \cdot (12.11 + 2 \cdot 0.0010 P_{G_2})$$

Asimismo, los generadores deben proporcionar la demanda más las pérdidas, $P_D + P_p = P_{G_1} + P_{G_2}$. Nótese que el sistema de ecuaciones a resolver es no lineal al incluir la ecuación de pérdidas, debiendo utilizarse un método iterativo.

Sin penalizaciones por pérdidas: en este caso, $L_1 = L_2 = 1$, resultando

$$P_{G_1} = 400.24 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 565.76 \text{ MW} \quad \lambda = 13.24 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación $C_T = C_1 + C_2 = 12770.79 \text{ €/h}$, y unas pérdidas de 16 MW.

Obviamente, la anterior solución, aunque óptima, no es válida pues el generador 2 no puede proporcionar la potencia requerida. En consecuencia, haciendo $P_{G_2} = 500 \text{ MW}$, la solución correcta sería:

$$P_{G_1} = 462.5 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 500 \text{ MW} \quad \lambda = 13.63 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación en este caso $C_T = 12740.73 \text{ €/h}$, y unas pérdidas de 12.5 MW.

Cabe destacar que, aunque se ha limitado la potencia del generador más económico, se llega a la aparente paradoja de obtener una reducción en el coste total. Dicha reducción de costes es causada por la disminución de pérdidas como consecuencia de limitar P_{G_2} , generador que es responsable de las pérdidas en la línea de transporte.

Penalizando a los generadores por pérdidas: las pérdidas incrementales de cada generador se obtienen como

$$PIT_1 = \frac{\partial P_p}{\partial P_{G_1}} = 0 \quad PIT_2 = \frac{\partial P_p}{\partial P_{G_2}} = 0.0001 \cdot P_{G_2}$$

y los coeficientes de penalización:

$$L_1 = \frac{1}{1 - PIT_1} = 1 \quad L_2 = \frac{1}{1 - PIT_2} = \frac{1}{1 - 0.0001 \cdot P_{G_2}}$$

El sistema de ecuaciones a resolver resulta, por tanto:

$$(10.76 + 2 \cdot 0.0031 P_{G_1}) = \frac{1}{1 - 0.0001 \cdot P_{G_2}} \cdot (12.11 + 2 \cdot 0.0010 P_{G_2})$$

$$P_D + 0.00005 P_{G_2}^2 = P_{G_1} + P_{G_2}$$

El anterior sistema de ecuaciones no lineales proporciona la siguiente solución:

$$P_{G_1} = 479.86 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 481.74 \text{ MW} \quad \lambda = 13.74 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación de 12739.23 €/h, y unas pérdidas de 11.6 MW.

Obsérvese que la potencia del generador más económico *a priori* se ve penalizada por las pérdidas en el sistema, obteniéndose una reducción de costes respecto al caso anterior.

- 10.3.** Los 2 generadores térmicos del sistema eléctrico representado en la Figura 10.6 suministran una demanda de 1700 MW en el nudo 4.

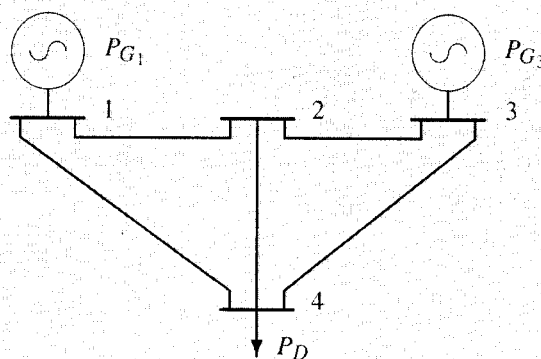


Figura 10.6 Sistema eléctrico del Problema 10.3.

Líneas				
<i>i</i>	<i>j</i>	R	X	B
1	2	0.0030	0.010	0.0
1	4	0.0050	0.050	0.0
2	3	0.0005	0.005	0.0
2	4	0.0010	0.005	0.0
3	4	0.0010	0.010	0.0

Tabla 10.1 Datos de las líneas del Problema 10.3.

i	Nudos					
	V_i p.u.	θ_i Grados	P_D MW	Q_D Mvar	P_G MW	Q_G Mvar
1	1.000	0.000			1568.9	77.2
2	0.974	-7.280				
3	1.000	-8.020			200.0	1052.9
4	0.946	-10.116	1700	800		

Tabla 10.2 Estado del sistema del Problema 10.3.

Las curvas de costes de los dos generadores son las siguientes:

$$C_1(P_{G_1}) = 350 + 4P_{G_1} + 0.0010P_{G_1}^2 \text{ €/h} \quad 500 \leq P_{G_1} \leq 2000$$

$$C_3(P_{G_3}) = 400 + 5P_{G_3} + 0.0015P_{G_3}^2 \text{ €/h} \quad 200 \leq P_{G_3} \leq 1000$$

Determinar el despacho económico de ambos generadores en los siguientes casos:

1. Sin considerar las pérdidas del transporte.
2. Utilizando la siguiente ecuación de pérdidas:

$$P_p = (26.758P_{G_1}^2 + 8.538P_{G_1}P_{G_3} + 7.973P_{G_3}^2) \cdot 10^{-6} \text{ MW}$$

3. Utilizando coeficientes de penalización obtenidos a partir de las ecuaciones del sistema.

Resolución

Sin considerar las pérdidas en el transporte: el sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} 4 + 0.002P_{G_1} &= 5 + 0.003P_{G_3} \\ 1700 &= P_{G_1} + P_{G_3} \end{aligned}$$

El anterior sistema de ecuaciones no lineales proporciona el siguiente despacho económico:

$$P_{G_1} = 1220 \text{ MW} \quad P_{G_3} = 480 \text{ MW} \quad \lambda = 6.44 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación de 9864 €/h.

Utilizando una ecuación de pérdidas: se resolverá en primer lugar el caso en el que los generadores no se ven penalizados por pérdidas, aunque éstas sí se incluyen en el balance de potencias. El sistema de ecuaciones a resolver en este caso es el siguiente:

$$\begin{aligned} 4 + 0.002P_{G_1} &= 5 + 0.003P_{G_3} \\ 1700 + (26.758P_{G_1}^2 + 8.538P_{G_1}P_{G_3} + 7.973P_{G_3}^2) \cdot 10^{-6} &= P_{G_1} + P_{G_3} \end{aligned}$$

Sistema no lineal que proporciona la siguiente solución:

$$P_{G_1} = 1249.46 \text{ MW} \quad P_{G_3} = 499.64 \text{ MW} \quad \lambda = 6.5 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación de 10181.6 €/h, y unas pérdidas de 49 MW.

Se observa cómo ambos generadores aumentan su potencia respecto al caso anterior debido a las pérdidas del sistema, aumentando el coste en consecuencia.

En el caso de penalizar a los generadores por su influencia sobre las pérdidas, es necesario obtener en primer lugar las pérdidas incrementales de cada generador:

$$\begin{aligned} PIT_1 &= \frac{\partial P_p}{\partial P_{G_1}} = (2 \cdot 26.758P_{G_1} + 8.538P_{G_3}) \cdot 10^{-6} \\ PIT_3 &= \frac{\partial P_p}{\partial P_{G_3}} = (8.538P_{G_1} + 2 \cdot 7.973P_{G_3}) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

y los coeficientes de penalización

$$L_1 = \frac{1}{1 - PIT_1} = \frac{1}{1 - (2 \cdot 26.758 P_{G_1} + 8.538 P_{G_3}) \cdot 10^{-6}}$$

$$L_3 = \frac{1}{1 - PIT_3} = \frac{1}{1 - (8.538 P_{G_1} + 2 \cdot 7.973 P_{G_3}) \cdot 10^{-6}}$$

El sistema de ecuaciones a resolver resulta en este caso:

$$(4 + 0.002 P_{G_1}) \frac{1}{1 - (2 \cdot 26.758 P_{G_1} + 8.538 P_{G_3}) \cdot 10^{-6}}$$

$$= (5 + 0.003 P_{G_3}) \frac{1}{1 - (8.538 P_{G_1} + 2 \cdot 7.973 P_{G_3}) \cdot 10^{-6}}$$

$$1700 + (26.758 P_{G_1}^2 + 8.538 P_{G_1} P_{G_3} + 7.973 P_{G_3}^2) \cdot 10^{-6} = P_{G_1} + P_{G_3}$$

Sistema no lineal que proporciona:

$$P_{G_1} = 1180.55 \text{ MW} \quad P_{G_3} = 564.98 \text{ MW} \quad \lambda = 6.83 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación de 10169.62 €/h, y unas pérdidas de 45.5 MW. Como es lógico, tanto las pérdidas como el coste total disminuyen respecto al caso anterior.

Compruebe el lector que, en el óptimo, ambos generadores trabajan con distintos costes incrementales (6.36 y 6.69 €/MWh) y que dicha diferencia se ve compensada por los coeficientes de penalización (1.07 y 1.02).

Utilizando coeficientes de penalización obtenidos a partir de las ecuaciones del sistema: a partir de los parámetros de las líneas proporcionados en la Tabla 10.1, se obtiene la matriz de admitancias nodales

$$y = \begin{bmatrix} 29.503 - 111.545j & -27.523 + 91.743j & 0 & -1.980 + 19.802j \\ -27.523 + 91.743j & 85.786 - 482.071j & -19.802 + 198.02j & -38.461 + 192.308j \\ 0 & -19.802 + 198.020j & 29.703 - 297.03j & -9.901 + 99.001j \\ -1.980 + 19.802j & -38.461 + 192.308j & -9.901 + 99.001j & 50.343 - 311.120j \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de pérdidas incrementales de los nudos del sistema se obtienen, para el estado concreto mostrado en la Tabla 10.2, como $PIT = C^T B^{-1} + I^T$, donde

C:

$$C_j = \partial P_1 / \partial \theta_j = V_1 V_j (-G_{1,j} \text{sen } \theta_j - B_{1,j} \text{cos } \theta_j) \quad j = 2, \dots, n$$

siendo el generador 1 el de referencia. En este caso

$$C^T = [-92.034 \quad 0 \quad -18.77]$$

B:

$$B_{i,j} = \partial P_i / \partial \theta_j \quad i = 2, \dots, n \quad j = 2, \dots, n$$

$$B_{i,j} = V_i V_j (G_{i,j} \text{sen } \theta_{ij} - B_{i,j} \text{cos } \theta_{ij}) \quad i \neq j$$

$$B_{i,i} = \sum_{j \neq i} V_i V_j (-G_{i,j} \text{sen } \theta_{ij} + B_{i,j} \text{cos } \theta_{ij})$$

Resultando

$$B = \begin{bmatrix} 457.075 & -193.104 & -178.730 \\ -192.606 & 286.541 & -93.935 \\ -175.223 & -93.250 & 286.585 \end{bmatrix}$$

I : vector unitario de dimensión $n - 1$, en este caso

$$I^T = [1 \quad 1 \quad 1]$$

En consecuencia:

$$PIT = C^T B^{-1} + I^T = [-0.0695 \quad -0.0736 \quad -0.0844]$$

con lo que se obtienen los coeficientes necesarios: $PIT_1 = 0$ y $PIT_3 = -0.0736$.

Nótese que, junto a los coeficientes de pérdidas incrementales de los generadores, se han obtenido los correspondientes a los nudos de consumo, muy útiles estos últimos para cuantificar el efecto incremental de los consumos sobre las pérdidas del sistema.

El sistema de ecuaciones a resolver resulta, con $L_1 = 1$ y $L_3 = 1/(1 + 0.0736)$:

$$\begin{aligned} L_1 (4 + 0.002 P_{G_1}) &= L_3 (5 + 0.003 P_{G_3}) \\ 1769 &= P_{G_1} + P_{G_3} \end{aligned}$$

Obsérvese que las ecuaciones son lineales debido a que tanto los coeficientes de penalización como las propias pérdidas en el sistema se han supuesto constantes e iguales a los valores correspondientes al estado inicial del sistema.

La solución óptima resulta:

$$P_{G_1} = 1168.08 \text{ MW} \quad P_{G_3} = 600.92 \text{ MW} \quad \lambda = 6.34 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación de 10333 €/h.

Como es evidente, al cambiar las potencias generadas, dejan de ser válidos tanto el valor de pérdidas como los coeficientes de penalización utilizados. Por ello, conviene volver a resolver el problema hasta que los cambios en la generación sean suficientemente pequeños. Así, el nuevo estado del sistema, proporcionado por un flujo de cargas con $P_{G_3} = 600.92$ (el generador 1 debe asumir las nuevas pérdidas), se presenta en la Tabla 10.3.

Nudos						
i	V_i p.u.	θ_i Grados	P_D MW	Q_D Mvar	P_G MW	Q_G Mvar
1	1.000	0.000			1744.7	102.0
2	0.977	-5.128				
3	1.000	-4.999			600.9	927.7
4	0.949	-7.805	1700	800		

Tabla 10.3 Estado del sistema tras actualizar la generación.

Las pérdidas incrementales de transporte resultan, para el nuevo estado del sistema:

$$PIT = C^T B^{-1} + I^T = [-0.0480 \quad -0.0490 \quad -0.0626]$$

con lo cual, $L_1 = 1$ y $L_3 = 1/(1 + 0.0490) = 0.9532$.

Las ecuaciones a resolver son ahora:

$$\begin{aligned} L_1 (4 + 0.002 P_{G_1}) &= L_3 (5 + 0.003 P_{G_3}) \\ 1743.7 &= P_{G_1} + P_{G_3} \end{aligned}$$

sistema que proporciona la siguiente solución:

$$P_{G_1} = 1184.36 \text{ MW} \quad P_{G_3} = 560.34 \text{ MW} \quad \lambda = 6.37 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación de 10162.8 €/h.

Repetiendo nuevamente el proceso, con el nuevo estado del sistema obtenido mediante un flujo de cargas para $P_{G_3} = 560.34$, se obtienen los valores de la Tabla 10.4

Nudos						
i	V_i p.u.	θ_i Grados	P_D MW	Q_D Mvar	P_G MW	Q_G Mvar
1	1.000	0.000			1185.5	98.4
2	0.976	-5.344				
3	1.000	-5.303			560.3	939.5
4	0.949	-8.037	1700	800		

Tabla 10.4 Estado del sistema tras actualizar nuevamente la generación.

Las pérdidas incrementales de transporte resultan ahora:

$$PIT = C^T B^{-1} + I^T = \begin{bmatrix} -0.0501 & -0.0515 & -0.0647 \end{bmatrix}$$

y $L_1 = 1$, $L_3 = 1/(1 + 0.0515) = 0.9510$.

Resolviendo las ecuaciones

$$L_1 (4 + 0.002 P_{G_1}) = L_3 (5 + 0.003 P_{G_3})$$

$$1744.7 = P_{G_1} + P_{G_3}$$

se obtiene:

$$P_{G_1} = 1181.32 \text{ MW} \quad P_{G_3} = 563.38 \text{ MW} \quad \lambda = 6.36 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación de 10163.8 €/h. Esta solución es suficientemente próxima a la anterior como para ser aceptada como válida.

10.4. Dos centrales térmicas de carbón deben satisfacer una demanda conjunta de 800 MW. Las curvas de consumo energético (en termias por hora) en función de la potencia eléctrica suministrada son las siguientes:

$$H_1(P_{G_1}) = 68074.69 + 1716.50 P_{G_1} + 0.49453 P_{G_1}^2 \text{ Te/h} \quad 200 \leq P_{G_1} \leq 800$$

$$H_2(P_{G_2}) = 61461.32 + 2014.93 P_{G_2} + 0.16639 P_{G_2}^2 \text{ Te/h} \quad 200 \leq P_{G_2} \leq 800$$

Ambas centrales utilizan el mismo tipo de carbón, con un poder calorífico de 6050 Te/t y un coste de 37.91 €/t.

En el proceso de combustión del carbón, el 10% del mismo se transforma en cenizas que son evacuadas con los humos. Las centrales disponen de precipitadores de cenizas que eliminan el 85% y el 90% de las cenizas, respectivamente.

Determinar:

1. La potencia que debe suministrar cada generador para minimizar el coste de producción y la cuantía de éste.
2. La potencia que debe suministrar cada generador para minimizar la emisión de cenizas y la mejora de dicha emisión respecto al caso anterior. ¿Cuál es el coste económico de minimizar la emisión de cenizas?

Resolución

Despacho económico: las curvas de costes de los generadores se obtienen utilizando el poder calorífico y el precio del combustible,

$$C_1 (\text{€/h}) = H_1 (\text{Te/h}) / 6050 (\text{t/Te}) 37.91 (\text{€/t})$$

resultando

$$C_1 = 426.56 + 10.756P_{G_1} + 0.0031P_{G_1}^2$$

$$C_2 = 385.12 + 12.626P_{G_2} + 0.00104P_{G_2}^2$$

Las condiciones para el despacho económico de los dos generadores implican la igualdad de costes incrementales,

$$CI_1 = CI_2 = \lambda \implies 10.756 + 2 \cdot 0.0031P_{G_1} = 12.626 + 2 \cdot 0.00104P_{G_2}$$

junto a la demanda total a satisfacer, $800 = P_{G_1} + P_{G_2}$. Resolviendo las ecuaciones se obtiene:

$$P_{G_1} = 426.8 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 373.2 \text{ MW} \quad \lambda = 13.4 \text{ €/MWh}$$

con un coste total de operación de 10823.9 €/h.

La emisión de cenizas para dichas potencias resulta:

$$EC = H_1 \frac{0.1 \cdot 0.15}{6050} + H_2 \frac{0.1 \cdot 0.1}{6050} = 3.591 \text{ t/h}$$

Mínimas emisiones: la función a minimizar en este caso es la siguiente:

$$EC = H_1 \frac{0.1 \cdot 0.15}{6050} + H_2 \frac{0.1 \cdot 0.1}{6050}$$

Las condiciones para mínimas emisiones de cenizas implican:

$$\frac{0.1 \cdot 0.15}{6050} (1716.50 + 2 \cdot 0.49453P_{G_1}) = \frac{0.1 \cdot 0.1}{6050} (2014.93 + 2 \cdot 0.16639P_{G_2}) = \lambda$$

junto al balance de potencias, $800 = P_{G_1} + P_{G_2}$.

Resolviendo las ecuaciones se obtiene:

$$P_{G_1} = -161.64 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 961.64 \text{ MW} \quad \lambda = 0.00386 \text{ t/MWh}$$

solución evidentemente inviable pues no respeta los límites de los generadores.

Llevando el generador 1 a mínimo técnico, la solución óptima es la siguiente:

$$P_{G_1} = 200 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 600 \text{ MW} \quad \lambda = 0.00366 \text{ t/MWh}$$

con un coste total de operación de 11036.9 €/h. El coste de minimizar las emisiones resulta, por tanto, de 213 €/h.

La emisión de cenizas es ahora:

$$EC = H_1 \frac{0.1 \cdot 0.15}{6050} + H_2 \frac{0.1 \cdot 0.1}{6050} = 3.268 \text{ t/h}$$

con lo que se obtiene una reducción de 323 kg/h.

Debe hacerse notar que, en este caso, λ es el aumento de la emisión de cenizas por cada MWh adicional que se genere (3.66 kg/h adicionales de emisión por MWh).

- 10.5.** Un sistema eléctrico está dividido en cuatro áreas gestionadas por compañías eléctricas independientes entre sí. Los consumos previstos para una hora determinada y las curvas de costes de generación de cada compañía son los siguientes:

Compañía	Costes €/h	Límites MW	Demanda MW
1	$350 + 4P + 0.002P^2$	$1000 \leq P \leq 2000$	1500
2	$425 + 5P + 0.005P^2$	$500 \leq P \leq 1000$	700
3	$375 + 10P + 0.002P^2$	$500 \leq P \leq 1000$	800
4	$500 + 12.5P + 0.0075P^2$	$100 \leq P \leq 500$	400

Tabla 10.5

Determinar:

1. Los costes de generación de cada compañía si no existen intercambios energéticos entre ellas.
2. Los costes de generación y los intercambios de potencia si las cuatro compañías deciden coordinar sus generaciones en despacho económico.

Resolución

Sin intercambios energéticos: si cada compañía atiende su propia demanda, los costes de generación y los costes incrementales son los siguientes

$$\begin{array}{lll}
 P_1 = 1500 & C_1 = 10850 \text{ €/h} & CI_1 = 10 \text{ €/MWh} \\
 P_2 = 700 & C_2 = 6375 \text{ €/h} & CI_2 = 12 \text{ €/MWh} \\
 P_3 = 800 & C_3 = 9655 \text{ €/h} & CI_3 = 13.2 \text{ €/MWh} \\
 P_4 = 400 & C_4 = 6700 \text{ €/h} & CI_4 = 18.5 \text{ €/MWh}
 \end{array}$$

El coste total del sistema eléctrico es 33580 €/h.

Obviamente, las compañías con un coste incremental elevado se ven incentivadas a comprar parte de su consumo a otras compañías de menor coste incremental.

Despacho económico conjunto: si las cuatro compañías acuerdan optimizar sus recursos de generación, las condiciones para el despacho económico conjunto implica la igualdad de costes incrementales

$$CI_1 = CI_2 = CI_3 = CI_4 = \lambda$$

Ecuaciones que junto a la demanda total a satisfacer, $3400 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$, permiten obtener el reparto óptimo:

$$P_1 = 2087.5 \text{ MW} \quad P_2 = 735 \text{ MW} \quad P_3 = 587.5 \text{ MW} \quad P_4 = -10$$

Volviendo a resolver el despacho económico tras fijar los generadores que han superado sus límites de generación, resulta:

$$P_1 = 2000 \text{ MW} \quad P_2 = 728.6 \text{ MW} \quad P_3 = 571.4 \text{ MW} \quad P_4 = 100$$

con un coste total de operación conjunto de 31639 €/h.

Los costes de cada compañía y las potencias exportadas se resumen en la siguiente tabla:

Compañía	Coste €/h	Ahorro €/h	Exportación MW
1	16350	-5500	500
2	6722	-347	28.6
3	6742	2913	-228.6
4	1825	4875	-300

Tabla 10.6

La disminución del coste de generación que se consigue con la explotación conjunta es de 1940.7 €/h. Cabe ahora plantearse cuál es el mejor reparto de dicho ahorro entre las cuatro compañías, cuestión que puede dar lugar a múltiples propuestas igualmente válidas.

Por otra parte, razone el lector si no sería más conveniente para la compañía 4 parar sus generadores e importar toda la energía consumida, puesto que en el despacho conjunto dicha compañía debe mantener sus generadores a mínima generación y a un coste incremental muy superior al del sistema en conjunto (14 frente a 12.3 €/MWh).

- 10.6.** Dos compañías eléctricas interconectadas entre sí suministran una demanda de 500 y 1000 MW respectivamente en sus respectivos sistemas eléctricos. Cada compañía posee dos generadores que trabajan en despacho económico satisfaciendo sus demandas. Los costes de producción de los generadores son los siguientes:

Compañía	Generador	Costes (€/h)
A	1	$580 + 9.023P + 0.00173P^2$
	2	$400 + 7.654P + 0.00160P^2$
B	3	$600 + 8.752P + 0.00127P^2$
	4	$420 + 8.431P + 0.00160P^2$

Tabla 10.7

Inicialmente, no existe intercambio alguno entre las dos compañías. Determinar:

1. El beneficio que supondría para ambas compañías realizar un despacho económico conjunto frente a despachos económicos independientes sin transacciones de energía.
2. En un instante determinado, la compañía B informa que desea comprar 50 MW durante la próxima hora, ofreciendo 467.5 € por la energía. Suponiendo que los consumos permanecen constantes, ¿debería la compañía A aceptar la oferta? ¿Debería solicitar un precio mayor?

Resolución

Despacho económico conjunto frente a despachos independientes: si cada compañía atiende su propia demanda mediante el despacho económico de sus propios generadores, la situación sería la siguiente

- Compañía A

$$\left. \begin{array}{l} CI_1 = CI_2 = \lambda_A \\ 500 = P_1 + P_2 \end{array} \right\} \quad P_1 = 34.7 \quad P_2 = 465.3 \quad \lambda_A = 9.143$$

Coste de generación: 5203 €/h

- Compañía B

$$\left. \begin{array}{l} CI_3 = CI_4 = \lambda_B \\ 1000 = P_3 + P_4 \end{array} \right\} \quad P_3 = 501.6 \quad P_4 = 498.4 \quad \lambda_B = 10.026$$

Coste de generación: 10329 €/h

Si ambas compañías deciden realizar un despacho conjunto de la generación, se tendría:

$$\left. \begin{array}{l} CI_1 = CI_2 = CI_3 = CI_4 = \lambda \\ 1500 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} P_1 = 172.4 \quad P_2 = 614.2 \\ P_3 = 341.6 \quad P_4 = 371.8 \\ \lambda = 9.62 \end{array}$$

con un coste de generación conjunto de 15405 €/h.

Nótese que el coste de la compañía A aumenta en 2691 € y que el de la compañía B disminuye en 2818 €, con un beneficio conjunto de 127 €. Obviamente, la compañía B deberá compensar a la otra compañía por su incremento de costes, así como repartir la disminución de costes entre ambas. En consecuencia, la compañía B debería pagar 2754.5 € a la compañía A.

Intercambio de 50 MW: la compra de 50 MW por parte de la compañía B conduciría a la siguiente situación

- Compañía A

$$\left. \begin{array}{l} CI_1 = CI_2 = \lambda_A \\ 550 = P_1 + P_2 \end{array} \right\} \quad P_1 = 58.7 \quad P_2 = 491.3 \quad \lambda_A = 9.226$$

Coste de generación: 5662 €/h

Beneficio: $467.5 - (5662 - 5203) = 8.5$ €/h

- Compañía B

$$\left. \begin{array}{l} CI_3 = CI_4 = \lambda_B \\ 950 = P_3 + P_4 \end{array} \right\} \quad P_3 = 473.7 \quad P_4 = 476.3 \quad \lambda_B = 9.955$$

Coste de generación: 9829 €/h Beneficio: $10329 - 9829 - 467.5 = 32.5$ €/h

Evidentemente, al ser el beneficio de la compañía B muy superior al de la compañía A, ésta debería solicitar un precio mayor.

El anterior procedimiento para determinar la bondad de la oferta tiene el inconveniente de que es necesario conocer las curvas de costes de generación de ambas compañías, información difícil si no imposible de obtener en la práctica. Una variante más realista consiste en realizar predicciones sobre la base del coste incremental de cada compañía antes de la transacción:

- Compañía A: $\lambda_A = 9.143$, beneficio $467.5 - 9.143 \cdot 50 = 10.35 \text{ €/h}$.
- Compañía B: $\lambda_B = 10.026$, beneficio $10.026 \cdot 50 - 467.5 = 33.8 \text{ €/h}$.

con lo que se llega a la misma conclusión, conociendo únicamente el coste incremental de cada empresa.

- 10.7.** Un sistema eléctrico está alimentado por dos centrales térmicas cuyas características coste/potencia son las siguientes:

$$C_1 = 120 + 12P_1 + 0.036P_1^2 \text{ €/h}$$

$$C_2 = 180 + 9P_2 + 0.060P_2^2 \text{ €/h}$$

Ambos generadores pueden variar su generación entre 10 y 100 MW. Si la demanda en el sistema varía según se indica en la siguiente tabla

Periodo	Consumo (MW)
00:00 – 06:00	50
06:00 – 18:00	150
18:00 – 00:00	50

Tabla 10.8

Determinar:

1. El reparto óptimo de la generación entre ambas unidades a lo largo del día.
2. Si el coste de la parada y vuelta a poner en servicio una central es de 180 €, ¿será más económico mantener las dos en servicio durante las 24 horas del día que trabajar con una única central en las horas valle?

Resolución

Programa diario de generación:

- Para una demanda de 50 MW

$$\left. \begin{array}{l} C_{I1} = C_{I2} \\ 50 = P_1 + P_2 \end{array} \right\} \quad P_1 = 15.6 \quad P_2 = 34.4$$

Coste de generación: 876.6 €/h

- Para una demanda de 150 MW

$$\left. \begin{array}{l} C_{I1} = C_{I2} \\ 150 = P_1 + P_2 \end{array} \right\} \quad P_1 = 78.1 \quad P_2 = 71.9$$

Coste de generación: 2414 €/h

El coste diario resulta $876.6 \cdot 12 + 2414 \cdot 12 = 39487.2 \text{ €}$.

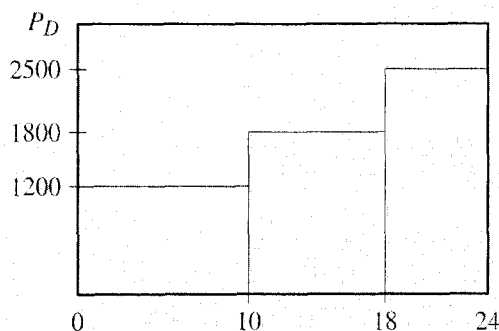
Parada de una central en las horas valle: si se decidiera parar una de las centrales durante las horas de menor consumo, ésta debería ser la central 1, que genera menos potencia durante dichas horas. El coste en horas valle resultaría:

$$50 = P_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 780 \text{ €/h}$$

y el coste diario $780 \cdot 12 + 2414 \cdot 12 + 180 = 38508 \text{ €}$, lo que supone un ahorro de 979.2 € al día.

No obstante, deberían tenerse en cuenta otros aspectos además del meramente económico, como es la disminución de la *fiabilidad* del sistema ante fallos al operar con un único generador en servicio durante 12 horas al día.

- 10.8.** Dos centrales térmicas deben suministrar una demanda diaria que evoluciona según se indica en la Figura 10.7, junto con las curvas de costes de ambos generadores.



$$C_1 = 300 + 6P_1 + 0.0005P_1^2 \text{ €/h}$$

$$C_2 = 500 + 6P_2 + 0.0010P_2^2 \text{ €/h}$$

$$500 \leq P_1 \leq 2000$$

$$300 \leq P_2 \leq 1500$$

Figura 10.7 Evolución de la demanda y curvas de costes de los generadores del Problema 10.8.

Los costes de arranque de las dos centrales son 10000 € y 2000 €, respectivamente.

Determinar el programa óptimo de generación de ambas centrales.

Resolución

Los estados posibles de las centrales para cada nivel de demanda son los siguientes:

A: **Demanda de 1200 MW:** puede ser satisfecha por las dos centrales o por cualquiera de ellas de forma independiente.

A11: Si ambas centrales están en servicio, la demanda deberá repartirse entre las dos en despacho económico:

$$\left. \begin{array}{l} C_{I1} = C_{I2} \\ 1200 = P_1 + P_2 \end{array} \right\} \quad P_1 = 800 \quad P_2 = 400 \quad \text{Coste: } 8480 \text{ €/h}$$

A10: Si la demanda se atiende mediante la central 1:

$$P_1 = 1200 \quad \text{Coste: } 8220 \text{ €/h}$$

A01: Si la demanda se atiende mediante la central 2:

$$P_2 = 1200 \quad \text{Coste: } 9140 \text{ €/h}$$

B: **Demanda de 1800 MW:** puede ser satisfecha por ambas centrales o por la primera central.

B11: Las dos centrales en servicio repartiéndose la demanda en despacho económico:

$$\left. \begin{array}{l} C_{I1} = C_{I2} \\ 1800 = P_1 + P_2 \end{array} \right\} \quad P_1 = 1200 \quad P_2 = 600 \quad \text{Coste: } 12680 \text{ €/h}$$

B10: Si la demanda se atiende mediante la central 1:

$$P_1 = 1800 \quad \text{Coste: } 12720 \text{ €/h}$$

C: **Demanda de 2500 MW:** se necesitan ambas centrales en servicio:

$$\left. \begin{array}{l} C_{I1} = C_{I2} \\ 2500 = P_1 + P_2 \end{array} \right\} \quad P_1 = 1667 \quad P_2 = 833 \quad \text{Coste: } 17883 \text{ €/h}$$

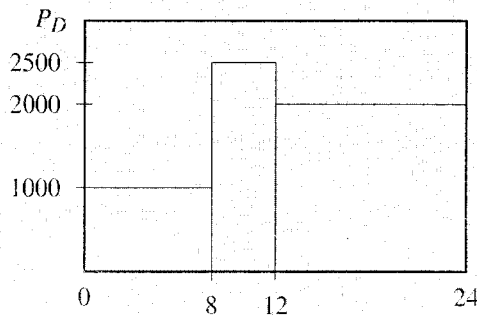
Los distintos programas de generación se obtienen combinando los estados posibles, teniendo en cuenta la duración de cada estado y los arranques necesarios:

Programa	Coste de generación	Coste de arranques	Total
A11 + B11 + C11	293540	0	293540
A10 + B11 + C11	290940	2000	292940
A01 + B11 + C11	300140	10000	310140
A11 + B10 + C11	293860	2000	295860
A10 + B10 + C11	291260	2000	293260
A01 + B10 + C11	300460	12000	312460

Tabla 10.9

En consecuencia, el programa óptimo consiste en parar la segunda central durante las 10 horas de menor demanda, volviéndola a poner en servicio durante el resto del día.

10.9. Tres centrales térmicas deben suministrar la demanda que se presenta en la Figura 10.8, junto con las respectivas curvas de costes.



$$C_1 = 350 + 5P_1 \text{ €/h} \quad 500 \leq P_1 \leq 1800$$

$$C_2 = 800 + 10.3P_2 \text{ €/h} \quad 200 \leq P_2 \leq 1000$$

$$C_3 = 800 + 10.5P_3 \text{ €/h} \quad 200 \leq P_3 \leq 1000$$

Figura 10.8 Evolución de la demanda y curvas de costes de los generadores del Problema 10.9.

Los costes de arranque son 3000, 8000 y 6000 €, respectivamente.
 Determinar el programa óptimo de generación de las centrales.

Resolución

El número de posibles combinaciones a analizar es bastante elevado en este caso, por lo que se utilizarán dos alternativas al análisis exhaustivo de las combinaciones.

Programa basado en prioridades de puesta en servicio: una alternativa para la determinación del programa óptimo de varias centrales, bastante utilizada en la práctica, consiste en ordenar las centrales de mayor a menor prioridad para su funcionamiento. Para ello se puede utilizar un índice que permita comparar las centrales en términos económicos como, por ejemplo, el coste medio a plena carga:

$$C_1(1800) = 9350 \quad CM_1 = 9350/1800 = 5.19$$

$$C_2(1000) = 11100 \quad CM_2 = 11100/1000 = 11.1$$

$$C_3(1000) = 11300 \quad CM_3 = 11300/1000 = 11.3$$

Con lo cual, el orden de puesta en servicio sería la central 1 en primer lugar, seguida de la central 2 y por último la central 3.

El programa de generación sería el siguiente:

- De 0:00 a 8:00h, con una demanda de 1000 MW, es suficiente con tener en servicio la central 1, siendo el coste de generación:

$$C_1(1000) = 5350 \text{ €/h} \implies C_T = 42800 \text{ €}$$

- De 8:00 a 12:00h, con una demanda punta de 2500 MW, se pondría en servicio la central 2. El despacho económico de ambas centrales implica llevar la central 1 al límite superior al tener menor coste incremental:

$$\left. \begin{aligned} C_1(1800) &= 9350 \text{ €/h} \\ C_2(700) &= 8010 \text{ €/h} \end{aligned} \right\} \implies C_T = 77440 \text{ €}$$

Nótese que en el coste total se ha incluido el coste de poner en servicio la segunda central.

- De 12:00 a 24:00h, con una demanda de 2000 MW, ésta sería atendida por las centrales 1 y 2, ambas en servicio al comienzo del intervalo horario.

$$\left. \begin{aligned} C_1(1800) &= 9350 \text{ €/h} \\ C_2(200) &= 2860 \text{ €/h} \end{aligned} \right\} \implies C_T = 146520 \text{ €}$$

El coste diario de operación resulta, por tanto, 266760 €.

Programa basado en un problema de optimización: la programación óptima de las centrales se puede plantear en este caso como un problema de optimización *lineal entera-mixta*. Introduciendo variables binarias para el estado de las centrales en cada período, $U_{g,t} \in [0, 1]$, y para la decisión de poner en servicio una central en un período determinado, $Y_{g,t} \in [0, 1]$, el problema a resolver queda de la forma siguiente:

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^3 A_g \cdot Y_{g,t} + d_t \cdot \left\{ \sum_{g=1}^3 \alpha_g \cdot U_{g,t} + \beta_g \cdot P_{g,t} \right\}$$

donde d_t es la duración en horas de cada intervalo (8, 4 y 12 horas, respectivamente), α_g y β_g corresponden a los costes fijo y variables de cada generador.

Las restricciones que debe cumplir el problema de optimización son las siguientes:

- Balance energético en cada período:

$$P_{D_t} = \sum_{g=1}^3 P_{g,t} \quad t = 1, \dots, 3$$

siendo P_{D_t} la demanda en cada período (1000, 2500 y 2000 MW).

- Potencias máxima y mínima de cada central:

$$P_g^{\min} \cdot U_{g,t} \leq P_{g,t} \leq P_g^{\max} \cdot U_{g,t} \quad t = 1, \dots, 3 \quad g = 1, \dots, 3$$

- Relación de coherencia entre las variables binarias:

$$U_{g,t} - U_{g,t-1} \leq Y_{g,t}$$

El problema de optimización ha sido resuelto utilizando GAMS, un programa informático que facilita la formulación y resolución de problemas de optimización.

El programa óptimo de generación es el siguiente:

- De 0:00 a 8:00h se mantiene en servicio la primera central únicamente, siendo el coste de generación:

$$C_1(1000) = 5350 \text{ €/h} \implies C_T = 42800 \text{ €}$$

- De 8:00 a 12:00h se pone en servicio la central 3:

$$\left. \begin{aligned} C_1(1800) &= 9350 \text{ €/h} \\ C_3(700) &= 8150 \text{ €/h} \end{aligned} \right\} \implies C_T = 76000 \text{ €}$$

donde se ha tenido en cuenta el coste de poner en servicio la tercera central.

- De 12:00 a 24:00h se mantienen en servicio las centrales 1 y 3:

$$\left. \begin{aligned} C_1(1800) &= 9350 \text{ €/h} \\ C_3(200) &= 2900 \text{ €/h} \end{aligned} \right\} \implies C_T = 147000 \text{ €}$$

El coste óptimo diario resulta 259800 €.

Cabe destacar que si se hubiera optado por la aproximación basada en los costes medios a plena carga, el coste diario hubiera resultado 6969 € más elevado. Esto es debido al menor coste de arranque y parada de la central 3, coste que no se tiene en cuenta al calcular el coste medio.

- 10.10.** Una central hidroeléctrica con una potencia máxima de 600 MW dispone de una energía almacenada en el embalse de 3600 MWh, como se muestra en la Figura 10.8 junto con la demanda diaria.

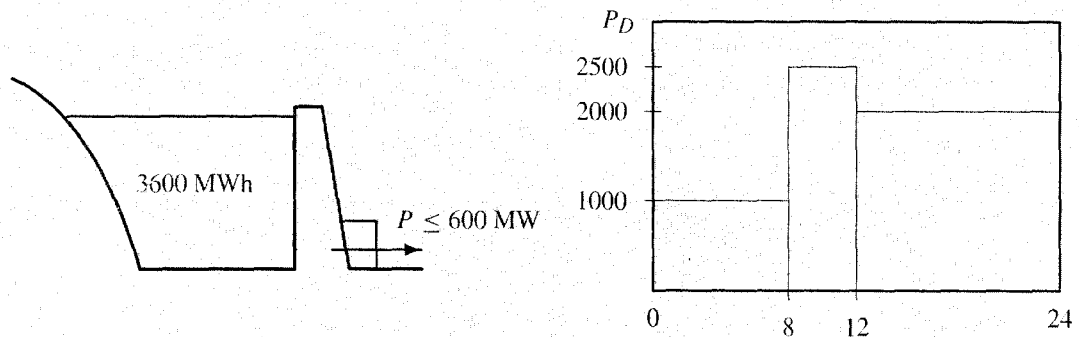


Figura 10.9 Evolución de la demanda y características de la central hidroeléctrica del Problema 10.10.

La curva de coste equivalente del conjunto de centrales térmicas del sistema eléctrico es la siguiente:

$$C = 3250 - 0.3P_T + 0.0024P_T^2 \quad \text{€/h}$$

Determinar el programa óptimo de generación de la central hidráulica y el ahorro que se obtiene al utilizar la energía almacenada en el embalse.

Resolución

Si toda la demanda fuera asumida por las centrales térmicas, el coste de generación sería:

$$\begin{aligned} P_T = 1000 &\implies C = 5350 \quad \text{€/h} \\ P_T = 2500 &\implies C = 17500 \quad \text{€/h} \\ P_T = 2000 &\implies C = 12250 \quad \text{€/h} \\ \text{Coste total:} & \quad 8 \cdot 5350 + 4 \cdot 17500 + 12 \cdot 12250 = 259800 \text{ €} \end{aligned}$$

La programación óptima de la central hidráulica se puede resolver planteando el siguiente problema de optimización:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{t=1}^3 d_t \cdot C(P_{T_t})$$

donde d_t es la duración en horas de cada intervalo.

Las restricciones que debe cumplir el problema de optimización son las siguientes:

- Balace energético en cada período:

$$P_{D_t} = \sum_{i=1}^3 (P_{T_i} + P_{H_i}) \quad t = 1, \dots, 3$$

siendo P_{H_t} la potencia de la central hidráulica en cada período.

- Potencias máxima y mínima de la central:

$$0 \leq P_{H_i} \leq 600$$

- Energía total disponible en el embalse:

$$3600 = \sum_{i=1}^3 d_i \cdot P_{H_i}$$

Resolviendo el problema de optimización no lineal se obtiene el siguiente programa óptimo de generación:

- De 0:00 a 8:00h la central hidráulica no genera, con lo cual el coste es el del parque térmico:

$$P_T = 1000 \implies C = 5350 \text{ €/h}$$

- De 8:00 a 12:00h la central hidráulica trabaja con una potencia media de 600 MW, consumiendo una energía de 2400 MWh. El coste horario resulta:

$$P_T = 1900 \implies C = 11344 \text{ €/h}$$

- De 12:00 a 24:00h la central hidráulica trabaja con una potencia media de 100 MW, consumiendo una energía de 1200 MWh. El coste horario resulta:

$$P_T = 1900 \implies C = 11344 \text{ €/h}$$

En consecuencia, el coste óptimo diario resulta 224304 € y el ahorro obtenido de la utilización de la energía hidráulica es 35496 €.

Una variable de gran interés que proporciona el problema de optimización es el *multiplicador de Lagrange* asociado a la restricción de la energía disponible en el embalse, variable dual que proporciona la disminución del coste por cada MWh adicional de energía hidráulica disponible en el embalse: -8.82 €/MWh en este caso.

Cabe destacar que el programa óptimo de la central hidroeléctrica tiene una interpretación bastante lógica: la energía almacenada en el embalse se utiliza para "recortar" la curva de demanda con el objeto de disminuir el coste de generación, como se muestra en la Figura 10.10.

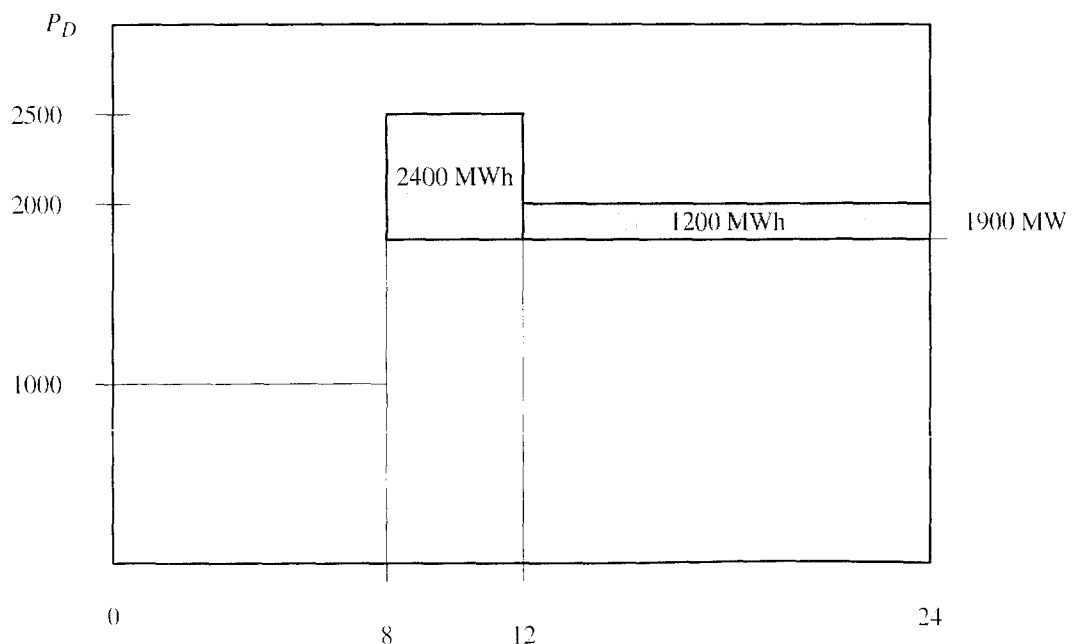


Figura 10.10 Utilización óptima de la energía hidráulica en el Problema 10.10.

10.11. Dos centrales hidroeléctricas están dispuestas en una misma cuenca como se muestra en la Figura 10.11, junto con la demanda a satisfacer en el sistema.

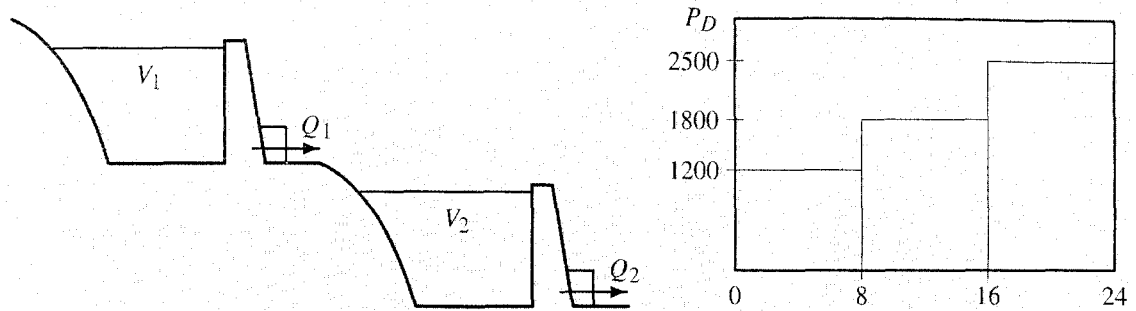


Figura 10.11 Evolución de la demanda y variables asociadas a las centrales hidroeléctricas del Problema 10.11.

Las curvas características caudal-potencia de las centrales son las siguientes:

$$Q_1 = 0.45 P_{H_1} \text{ m}^3/\text{s} \quad P_{H_1} \leq 100 \text{ MW}$$

$$Q_2 = 0.40 P_{H_2} \text{ m}^3/\text{s} \quad P_{H_2} \leq 300 \text{ MW}$$

Los embalses disponen inicialmente de 2 y 1.4 hm³, y se sabe que el caudal utilizado por la central 1 tarda menos de 8 horas en alcanzar el embalse 2.

La curva de coste equivalente del conjunto de centrales térmicas del sistema eléctrico es la siguiente:

$$C = 32 + 6.5 P_T + 0.0003 P_T^2 \quad \text{€/h}$$

Determinar el programa óptimo de generación de las centrales hidráulicas y el ahorro que se obtiene al utilizar la energía almacenada en los embalses.

Resolución

Sin generación hidráulica, el coste de generación sería:

$$P_T = 1200 \implies C = 8264 \quad \text{€/h}$$

$$P_T = 1800 \implies C = 12704 \quad \text{€/h}$$

$$P_T = 2500 \implies C = 18157 \quad \text{€/h}$$

$$\text{Coste total: } 8 \cdot 8264 + 8 \cdot 12704 + 8 \cdot 18157 = 313000 \text{ €}$$

El problema de optimización a resolver es el siguiente:

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^3 8 \cdot C(P_{T_t})$$

donde se ha tenido en cuenta que los intervalos tienen una duración de 8 horas.

Las ecuaciones que modelan el problema son las siguientes:

- Balance energético en cada período:

$$P_{D_t} = \sum_{h=1}^3 (P_{T_t} + P_{H_{1,t}} + P_{H_{2,t}}) \quad t = 1, \dots, 3$$

siendo $P_{H_{h,t}}$ la potencia de la central hidráulica h en el período t .

- Límites de la central:

$$0 \leq P_{H_{1,t}} \leq 100 \text{ MW} \quad 0 \leq P_{H_{2,t}} \leq 300 \quad t = 1, \dots, 3$$

- Relación caudal-potencia de cada central:

$$Q_{1,t} = 0.45 P_{H_{1,t}} \text{ m}^3/\text{s} \quad Q_{2,t} = 0.4 P_{H_{2,t}} \text{ m}^3/\text{s} \quad t = 1, \dots, 3$$

- Balances hidráulicos en los embalses:

$$V_{1,t} = V_{1,t-1} - 8 \cdot 3600 \cdot Q_{1,t} \text{ m}^3 \quad t = 1, \dots, 3$$

$$V_{2,t} = V_{2,t-1} - 8 \cdot 3600 \cdot Q_{2,t} + 8 \cdot 3600 \cdot Q_{1,t-1} \text{ m}^3 \quad t = 1, \dots, 3$$

siendo $V_{h,t}$ el volumen de agua en el embalse h al final del período t , con $V_{h,t} \geq 0$. Obviamente, $V_{1,0} = 2 \cdot 10^6$ y $V_{2,0} = 1.4 \cdot 10^6$. Asimismo, se supondrá que $Q_{1,0} = 0$.

Resolviendo el problema de optimización se obtiene el siguiente programa óptimo de generación:

- De 0:00 a 8:00h las centrales hidráulicas no generan:

$$P_T = 1200 \implies C = 8264 \text{ €/h}$$

- De 8:00 a 16:00h la primera central hidráulica trabaja con una potencia media de 54.3 MW y un caudal de 24.4 m³/s, permaneciendo parada la segunda central. El coste horario resulta:

$$P_T = 1745.7 \implies C = 12293 \text{ €/h}$$

- De 16:00 a 24:00h la primera central hidráulica trabaja a potencia máxima (100 MW) y a caudal máximo (45 m³/s). La segunda central trabaja con una potencia media de 295.1 MW y un caudal de 118.1 m³/s. El coste horario resulta:

$$P_T = 2105 \implies C = 15043 \text{ €/h}$$

En consecuencia, el coste óptimo diario resulta 284803 € y el ahorro obtenido de la utilización de la energía hidráulica es 28197 €.

La Figura 10.12 resume el programa óptimo de ambas centrales junto a la evolución del volumen de agua en los embalses. Puede observarse cómo el programa óptimo tiende a acumular energía en los embalses para utilizarla en las horas de mayor demanda. Razone el lector por qué no trabajan los dos generadores a potencia máxima en el período de mayor demanda.

Central 1			
Período	00-08	08-16	16-24
Volumen	2.0	1.3	0
Caudal	0	24.4	45
Potencia	0	54.3	100

Central 2			
Período	00-08	08-16	16-24
Volumen	1.4	2.1	0
Caudal	0	0	118.1
Potencia	0	0	295.1

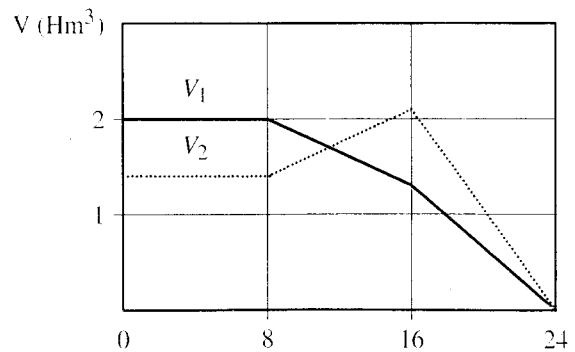


Figura 10.12 Programa óptimo de generación hidráulica del Problema 10.11.

10.12. Una central de bombeo puro está integrada en un sistema eléctrico cuya demanda evoluciona según se indica en la Figura 10.13.

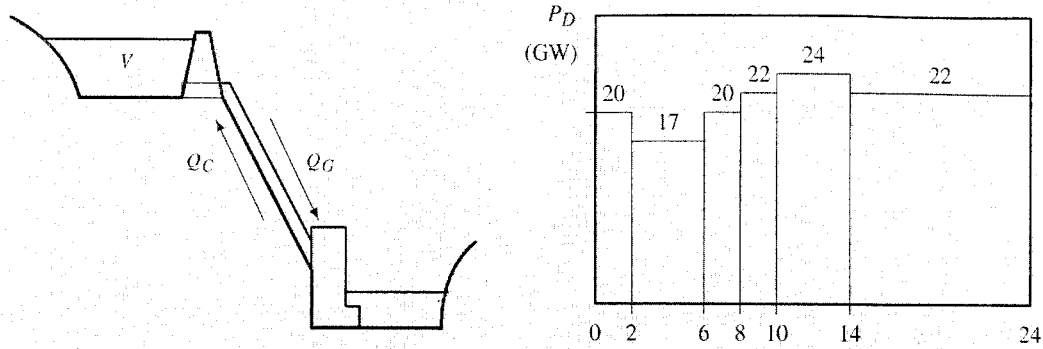


Figura 10.13 Evolución de la demanda y variables asociadas a la central de bombeo del Problema 10.12.

Las curvas características caudal-potencia de la central son las siguientes:

$$\begin{aligned} Q_G &= 0.48 P_G \text{ m}^3/\text{s} & P_G &\leq 215 \text{ MW} \\ Q_C &= 0.40 P_C \text{ m}^3/\text{s} & P_C &\leq 230 \text{ MW} \end{aligned}$$

siendo Q_G el caudal necesario para generar una potencia P_G , y Q_C el caudal en bombeo, con un consumo de potencia P_C .

La curva de coste equivalente del parque de generación térmica del sistema eléctrico es la siguiente:

$$C = 2692800 - 289.6 P_T + 0.0096 P_T^2 \quad \text{€/h}$$

Si el embalse superior tiene una capacidad de 2.2 hm^3 y se encuentra inicialmente vacío, determinar el programa óptimo de generación de la central y el rendimiento del ciclo de operación.

Resolución

Si la central de bombeo no entrara en servicio, el coste de generación sería:

$$\begin{aligned} P_T = 17000 &\implies C = 544000 \quad \text{€/h} \\ P_T = 20000 &\implies C = 740800 \quad \text{€/h} \\ P_T = 22000 &\implies C = 968000 \quad \text{€/h} \\ P_T = 24000 &\implies C = 1272000 \quad \text{€/h} \\ \text{Coste total:} & \quad 21843200 \quad \text{€} \end{aligned}$$

El programa óptimo de la central de bombeo se obtiene planteando el siguiente problema de optimización:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{t=1}^6 d_t \cdot C(P_{T_t})$$

donde d_t es la duración de cada uno de los seis intervalos de demanda constante.

Las ecuaciones que modelan el problema son las siguientes:

- Balance energético en cada período:

$$P_{D_t} = \sum_{i=1}^3 (P_{T_i} + P_{G_i} - P_{C_i}) \quad t = 1, \dots, 6$$

- Límites de la central:

$$0 \leq P_{G_t} \leq 215 \text{ MW} \quad 0 \leq P_{C_t} \leq 230 \quad t = 1, \dots, 6$$

- Relación caudal-potencia como turbina y como bomba:

$$Q_{G_t} = 0.48 P_{G_t} \text{ m}^3/\text{s} \quad Q_{C_t} = 0.4 P_{C_t} \text{ m}^3/\text{s} \quad t = 1, \dots, 6$$

- Balance hidráulico en el embalse superior:

$$V_t = V_{t-1} + \sum_{i=1}^6 d_i \cdot 3600 \cdot \{Q_{C_t} - Q_{G_t}\} \text{ m}^3 \quad t = 1, \dots, 6$$

siendo V_t el volumen de agua en el embalse superior al final del período t , con $V_0 = 0$ y $2.2 \text{ hm}^3 \geq V_t \geq 0$.

El programa óptimo de generación se resume en la Figura 10.14 y en la Tabla 10.10. Se puede observar cómo la central funciona como bomba a máxima potencia en el período de menor consumo, terminando de llenar el embalse en otros períodos de bajo consumo. Este proceso se repite a la inversa como turbina, funcionando a potencia máxima en el período de mayor demanda, terminando de vaciar el embalse en otros períodos de demanda elevada.

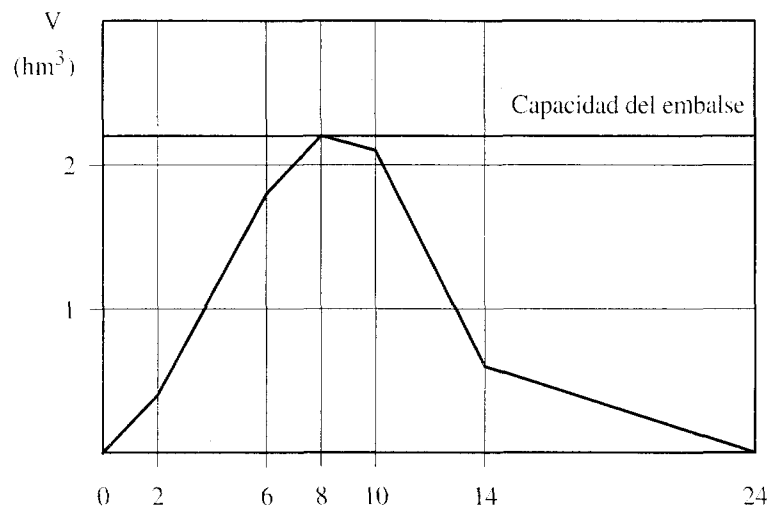


Figura 10.14 Volumen óptimo de la central de bombeo del Problema 10.12.

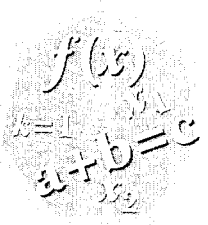
Período	00-02	02-06	06-08	08-10	10-14	14-24
Volumen	0.4	1.8	2.2	2.1	0.6	0
Caudal bombeando	60.8	92.0	60.8	0	0	0
Caudal turbinando	0	0	0	16.5	103.2	26.5
Potencia consumida	152	230	152	0	0	0
Potencia generada	0	0	0	34	215	34

Tabla 10.10 Programa óptimo de generación de la central de bombeo del Problema 10.12.

El coste de generación resulta ahora 21738000 €, lo que supone un ahorro de 105336 €.

Por otra parte, la energía total consumida en bombeo es de 1528 MWh, mientras que la energía total generada es 1268 MWh. En consecuencia, el rendimiento del ciclo de operación es de un 83%.

FLUJO ÓPTIMO DE CARGAS



En este capítulo se realiza una introducción al problema del *flujo óptimo de cargas*, más conocido por OPF (*Optimal Power Flow*), problema fundamental tanto en actividades de planificación como en la propia operación del sistema eléctrico.

A diferencia del *flujo de cargas* convencional, cuyo objetivo consiste en determinar el estado del sistema tomando como datos de partida las potencias generadas y consumidas en todos los nudos, así como el estado de los equipos de control (transformadores, reactancias, condensadores, etc.), un *flujo óptimo de cargas* permite resolver las ecuaciones del sistema eléctrico y obtener los valores de determinadas variables de control que optimizan un objetivo concreto, cuantificado éste en forma de una función escalar de las variables del problema.

Como se puso de manifiesto en el capítulo dedicado al *flujo de cargas*, el estado de un sistema eléctrico de n nudos queda determinado por las $2n$ ecuaciones nodales, expresadas en función de las tensiones nodales V_i y los elementos de la matriz de admitancias nodales, $Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$:

$$P_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad i = 1, \dots, n \quad (11.1)$$

$$Q_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad i = 1, \dots, n \quad (11.2)$$

Donde P_i y Q_i son las potencias activa y reactiva inyectadas en cada nudo, es decir, potencia neta, generada menos consumida, en el nudo:

$$P_i = P_{G_i} - P_{C_i} \quad Q_i = Q_{G_i} - Q_{C_i}$$

Cabe recordar que es necesario establecer una referencia para las fases, introduciendo el concepto de *nudo slack* o *de referencia* que supondremos el nudo 1, con $\theta_1 = 0$.

Las $2n$ ecuaciones (11.1) y (11.2) permiten obtener el estado del sistema eléctrico, dado por las $2n - 1$ incógnitas asociadas a las tensiones nodales, fijando *a priori* los valores de $2n$ variables del total de $4n - 1$ involucradas. Asimismo, cabe indicar que existen otras variables de control que aparecen en los términos de la matriz de admitancias, y cuyos valores deben ser asimismo conocidos *a priori*, típicamente las tomas de los transformadores de regulación.

Una simplificación de las ecuaciones nodales, muy utilizada en estudios centrados únicamente en los flujos de potencia activa en el sistema, es la que proporciona el *flujo de cargas en continua*:

$$P_i = \sum_{j=2}^n \hat{B}_{ij} \theta_j \quad i = 1, \dots, n \quad (11.3)$$

donde la matriz \hat{B} se construye de la misma forma que la matriz B' del flujo de cargas desacoplado rápido, incluyendo la fila correspondiente al nudo de referencia.

La Ecuación (11.3) permite obtener los flujos de potencia por líneas y transformadores:

$$P_f = X^{-1} A^T \theta \quad (11.4)$$

donde A es la matriz de incidencias, excluyendo el nudo de referencia, y X es una matriz diagonal con las reactancias de líneas y transformadores.

Las variables del sistema eléctrico están sujetas a límites impuestos tanto por los propios equipos que constituyen el sistema eléctrico, como por los criterios de operación del sistema.

Cabe distinguir, por tanto, entre dos tipos de límites:

- Límites sobre las variables del sistema que son objeto de control por parte de los operadores, principalmente:
 - Potencias activa y reactiva de los generadores, esta última normalmente asociada e intercambiable con la tensión en bornas del generador.
 - Relación de transformación de los transformadores con capacidad de cambiar tomas en carga, teniendo en cuenta el carácter discreto de las propias tomas de regulación.
 - Baterías de condensadores y reactancias, equipos con capacidad de generar y consumir potencia reactiva en incrementos discretos determinados por la conexión/desconexión de los distintos elementos.
- Límites de operación, principalmente:
 - Tensiones de los nudos.
 - Flujos de potencia por líneas y transformadores, cuantificada en términos de potencia aparente, activa, reactiva o incluso en forma de intensidad máxima.

El *flujo óptimo de cargas* se puede utilizar en múltiples contextos dentro de las actividades inherentes a la generación, transporte y distribución de energía eléctrica, variando el objetivo concreto de la optimización y, en función de dicho objetivo, el modelo del sistema y las variables de interés.

Como ejemplo de funciones objetivo en los estudios de *flujo óptimo de cargas* cabe citar las siguientes:

- Objetivos asociados al *despacho económico* de las centrales eléctricas:
 - Minimizar los costes de generación utilizando las Ecuaciones (11.1) y (11.2) para modelar la red de transporte e imponer, en su caso, límites a los flujos de potencia por las líneas. Este problema permite incluir de forma natural las pérdidas en el transporte en el despacho económico de las centrales.

- Minimizar los costes de generación utilizando el modelo lineal del sistema proporcionado por (11.3) para imponer límites a los flujos de potencia. En este caso, el modelo no permite considerar las pérdidas en el transporte, y se asume que las tensiones toman sus valores nominales.
- Objetivos asociados a la operación del transporte:
 - Determinar las actuaciones necesarias para eliminar posibles problemas en la red:
 - * Actuaciones necesarias sobre las potencias de los generadores para eliminar sobrecargas en líneas o transformadores, siempre buscando el mínimo sobrecoste y utilizando, por simplicidad, el modelo lineal definido por (11.3). Este problema puede extenderse para incluir restricciones sobre hipotéticos estados producidos por la pérdida de un elemento (generador, línea o transformador, principalmente), estados modelados por la Ecuación (11.3) particularizada para cada estado *pos-contingencia*, dando lugar al problema conocido como *flujo óptimo de cargas con restricciones de seguridad*.
 - * Actuaciones necesarias para eliminar problemas de tensiones bajas o excesivamente altas, actuando para ello sobre los elementos de control de tensiones (tensión y potencia reactiva de los generadores, transformadores con tomas de regulación, condensadores y reactancias, principalmente). Como es evidente por las propias variables de control, es necesario utilizar el modelo exacto y no lineal proporcionado por (11.1) y (11.2). Una función objetivo típica en este caso es la suma de las actuaciones sobre las variables de control, minimizando éstas.
 - Para un programa de generación determinado, reducir los costes de explotación actuando sobre los elementos de control de tensiones con el objeto de disminuir en lo posible las pérdidas en la red de transporte. Obviamente, será necesario utilizar el modelo completo dado por (11.1) y (11.2).
- Objetivos asociados a la planificación de la red de transporte:
 - Localización óptima, en términos de mínimo coste, y margen de control necesario en nuevos equipos de control de los flujos de potencia por la red, normalmente transformadores con desplazamiento de fase, con el fin de evitar futuros problemas de sobrecargas en líneas y transformadores.
 - Localización óptima y tamaño de nuevos equipos con capacidad de inyectar reactiva en la red, típicamente baterías de condensadores o reactancias, necesarios para disponer de mecanismos de control de tensiones en escenarios futuros. Como es evidente, será necesario utilizar el modelo completo, no lineal, del sistema.

Obviamente, en función del carácter lineal o no lineal tanto de la función objetivo como del modelo utilizado para el sistema eléctrico, será necesario utilizar herramientas de programación lineal o no lineal para su resolución.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 11.1.** Los dos generadores del sistema eléctrico representado en la Figura 11.1 suministran una demanda de 1700 MW en el nudo 4.

Las curvas de costes de los 2 generadores son las siguientes:

$$C_1(P_{G_1}) = 350 + 4P_{G_1} + 0.0010P_{G_1}^2 \text{ €/h} \quad 500 \leq P_{G_1} \leq 2000$$

$$C_3(P_{G_3}) = 400 + 5P_{G_3} + 0.0015P_{G_3}^2 \text{ €/h} \quad 200 \leq P_{G_3} \leq 1000$$

Determinar el despacho económico de ambos generadores mediante un *flujo de cargas óptimo* en los siguientes casos:

1. Sin considerar límites de potencia en las líneas.
2. Imponiendo un límite sobre la potencia transportada por la línea 2-4 de 900 MW.

Las tensiones deben mantenerse en todo caso entre 0.95 y 1.05 en p.u.

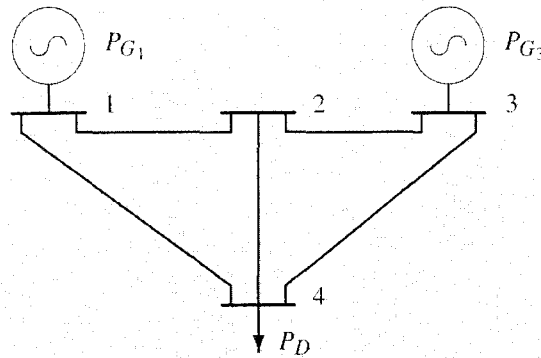


Figura 11.1 Sistema eléctrico del Problema 11.1.

Líneas (Base 100 MVA)				
<i>i</i>	<i>j</i>	R	X	B
1	2	0.0030	0.010	0.0
1	4	0.0050	0.050	0.0
2	3	0.0005	0.005	0.0
2	4	0.0010	0.005	0.0
3	4	0.0010	0.010	0.0

Tabla 11.1

Nudos						
<i>i</i>	<i>V_i</i> p.u.	<i>θ_i</i> Grados	<i>P_C</i> MW	<i>Q_C</i> Mvar	<i>P_G</i> MW	<i>Q_G</i> Mvar
1	1.000	0.000			1568.9	77.2
2	0.974	-7.280				
3	1.000	-8.020			200.0	1052.9
4	0.946	-10.116	1700	800		

Tabla 11.2

Resolución

Este mismo ejemplo se aborda en el Problema 10.3 utilizando factores de penalización por pérdidas. A efectos de comparación, el *despacho económico clásico* de ambos generadores implica el siguiente reparto de la potencia:

$$\left. \begin{aligned} C I_1 = C I_2 = \lambda \\ 1700 = P_{G_1} + P_{G_2} \end{aligned} \right\} \quad P_{G_1} = 1220 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 480 \text{ MW}$$

Lo que supone un coste marginal del sistema $\lambda = 6.44 \text{ €/MWh}$, y un coste total de generación de 9864 €/h.

Sin considerar límites sobre las potencias que transportan las líneas

A partir de los parámetros de las líneas proporcionados en la Tabla 11.1, se obtiene la matriz de admitancias nodales:

$$y = \begin{bmatrix} 29.503 - 111.545j & -27.523 + 91.743j & 0 & -1.980 + 19.802j \\ -27.523 + 91.743j & 85.786 - 482.071j & -19.802 + 198.02j & -38.461 + 192.308j \\ 0 & -19.802 + 198.02j & 29.703 - 297.03j & -9.901 + 99.001j \\ -1.980 + 19.802j & -38.461 + 192.308j & -9.901 + 99.001j & 50.343 - 311.120j \end{bmatrix}$$

Eligiendo el nudo 1 como referencia para las fases, $\theta_1 = 0$, las ecuaciones del sistema son las siguientes:

$$P_i = P_{G_i} - P_{C_i} = V_i \sum_{j=1}^4 V_j \{G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)\} \quad i = 1, \dots, 4$$

$$Q_i = Q_{G_i} - Q_{C_i} = V_i \sum_{j=1}^4 V_j \{G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)\} \quad i = 1, \dots, 4$$

donde las potencias generadas, tanto activa como reactiva, son variables a determinar, y las potencias consumidas son las siguientes expresadas en p.u.:

$$P_C^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 17]$$

$$Q_C^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 8]$$

Las tensiones nodales, en módulo y fase, excepto la fase del generador *slack* ($\theta_1 = 0$), constituyen asimismo variables del problema; en concreto, son las variables *de estado* que, una vez conocidas, permiten calcular cualquier otra magnitud del sistema eléctrico.

La función objetivo a minimizar en este caso es la suma de costes de los generadores:

$$C = 750 + 400P_{G_1} + 10P_{G_1}^2 + 500P_{G_3} + 15P_{G_3}^2$$

con P_{G_1} y P_{G_3} expresados en p.u. respecto a 100 MW.

Por último, es necesario imponer los distintos límites que se van a considerar en la solución:

- Potencias de los generadores:

$$5 \leq P_{G_1} \leq 20 \quad 2 \leq P_{G_3} \leq 10$$

- Tensiones:

$$0.95 \leq V_i \leq 1.05 \quad i = 1, \dots, 4$$

El problema de optimización a resolver consiste, por tanto, en minimizar la suma de los costes de generación, imponiendo las distintas ecuaciones de igualdad (ecuaciones del sistema) y de desigualdad (límites sobre las variables).

La solución óptima, obtenida mediante un algoritmo de optimización no lineal, se presenta en la Figura 11.2, y en las Tablas 11.3 y 11.4.

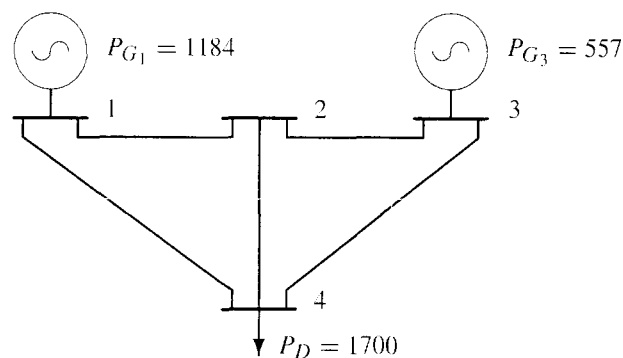


Figura 11.2 Estado óptimo en términos del coste de generación del sistema eléctrico del Problema 11.1.

Nudos				
i	V_i	θ_i	P_G	Q_G
	p.u.	Grados	MW	Mvar
1	1.050	0.000	1184	89
2	1.028	-4.812		
3	1.050	-4.812	557	927
4	1.002	-7.277		

Tabla 11.3

Líneas			
i	j	P_{ij}	P_{ji}
1	2	914	-889
1	4	275	-271
2	3	-57	58
2	4	946	-935
3	4	499	-494

Tabla 11.4

El coste óptimo de generación resulta 10141 €/h, y las pérdidas en el transporte 41 MW.

Cabe destacar el reparto óptimo de la generación obtenido teniendo en cuenta las pérdidas en el sistema, pérdidas cuyo coste económico es al mismo tiempo optimizado ajustando las tensiones de los generadores. Nótese que el coste de generación aumenta respecto al *despacho económico clásico* debido a que se han incluido las pérdidas en el balance. Compare el lector el resultado obtenido frente a las alternativas presentadas en el Problema 10.3.

Los *multiplicadores de Lagrange* asociados a las ecuaciones del sistema eléctrico proporcionan una información muy útil para cuantificar el coste del consumo según su localización en el sistema. En este ejemplo, los valores de dichos *multiplicadores de Lagrange*, también conocidos como *precios nodales*, son los siguientes:

Ecuación	Precio nodal	Ecuación	Precio nodal
	€/MWh		€/Mvarh
P_1	6.37	Q_1	0.00
P_2	6.66	Q_2	0.02
P_3	6.67	Q_3	0.00
P_4	6.76	Q_4	0.07

Tabla 11.5

Puede observarse cómo los precios nodales proporcionan el coste horario asociado al consumo de un MW o Mvar adicional en cada nudo. Compruebe el lector que en los nudos de generación el precio nodal coincide con el coste incremental del generador.

Imponiendo un límite sobre la potencia transportada por la línea "2-4" de 900 MW

En este caso, se desea limitar el flujo de potencia activa en la línea "2-4" a 900 MW. En la Tabla 11.4 se observa que el flujo de potencia activa en dicha línea tras la optimización resulta ser 946 y 935 en el origen y extremo de la línea, respectivamente.

Volviendo a resolver el problema de optimización del apartado anterior, imponiendo la restricción al flujo de potencia:

$$-9 \leq P_{2,4} \leq 9 \quad P_{2,4} = V_2 V_4 \{ G_{2,4} \cos(\theta_2 - \theta_4) + B_{2,4} \sin(\theta_2 - \theta_4) \} - G_{2,4} V_2^2$$

se obtiene el estado que se muestra en la Figura 11.3, y en las Tablas 11.6 y 11.7.

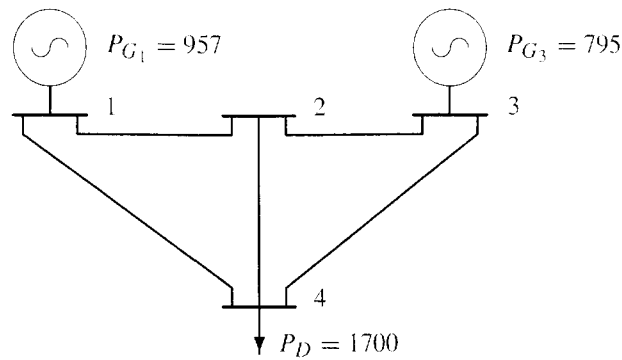


Figura 11.3 Estado óptimo con restricción sobre la potencia de la línea "2-4" en el sistema eléctrico del Problema 11.1.

Nudos				
i	V_i p.u.	θ_i Grados	P_G MW	Q_G Mvar
1	0.959	0.000	957	-621
2	1.001	-5.271		
3	1.050	-4.927	795	1714
4	0.978	-7.735		

Tabla 11.6

Líneas			
i	j	P_{ij}	P_{ji}
1	2	707	-680
1	4	248	-244
2	3	-220	225
2	4	900	-891
3	4	573	-565

Tabla 11.7

El coste de generación resulta ahora 10417 €/h, y las pérdidas en el transporte 52 MW, incrementándose ambos valores respecto al caso anterior.

Por otra parte, obsérvese cómo las tensiones de los generadores se ajustan para minimizar el coste asociado a las pérdidas en la nueva situación.

Al igual que el coste de generación, los *precios nodales* se incrementan como resultado de la restricción impuesta, pasando a valer:

Ecuación	Precio nodal €/MWh	Ecuación	Precio nodal €/Mvar h
P_1	5.91	Q_1	0.00
P_2	4.98	Q_2	-0.01
P_3	7.39	Q_3	0.00
P_4	12.86	Q_4	0.03

Tabla 11.8

Razone el lector por qué los precios nodales de la energía en los nudos de generación disminuyen mientras que en los nudos de consumo aumentan respecto al caso anterior.

11.2. El sistema eléctrico cuyos parámetros se muestran en la Figura 11.1, se encuentra en el estado que se presenta en la Figura 11.4, donde se observa que se ha puesto en servicio un generador en el nudo 2 con el objeto de ayudar al mantenimiento de las tensiones.

Para las potencias generadas que se indican en la Figura 11.4, determinar las consignas de tensión de los generadores que permiten reducir las pérdidas del sistema, manteniendo las tensiones entre 0.95 y 1.05 en p.u. y respetando los límites de reactiva de los generadores.

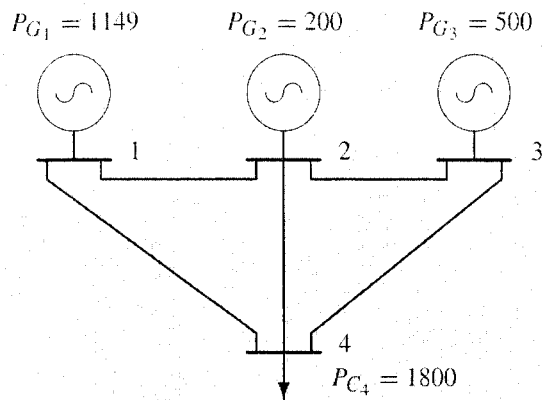


Figura 11.4 Estado del sistema eléctrico del Problema 11.2.

Nudos							
i	V_i p.u.	θ_i Grados	P_C MW	Q_C Mvar	P_G MW	Q_G Mvar	Q_G^{\min}, Q_G^{\max} Mvar
1	1.000	0.00			1149	89	-2000, 2000
2	0.980	-5.16			200	310	-500, 500
3	1.000	-5.30			500	963	-1000, 1000
4	0.940	-8.04	1800	1100			

Tabla 11.9

Resolución

La matriz de admitancias nodales coincide con la del problema anterior, al no haber cambiado la configuración de la red de transporte.

Eligiendo nuevamente el nudo 1 como referencia para las fases y como generador encargado de asumir las pérdidas, las ecuaciones del sistema son las siguientes:

$$P_i = P_{G_i} - P_{C_i} = V_i \sum_{j=1}^4 V_j \{G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)\} \quad i = 1, \dots, 4$$

$$Q_i = Q_{G_i} - Q_{C_i} = V_i \sum_{j=1}^4 V_j \{G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)\} \quad i = 1, \dots, 4$$

donde las potencias activas generadas están especificadas, excepto la del generador *de balance*, y las potencias reactivas de los generadores son variables a determinar. Expresadas en p.u.:

$$P_G^T = [P_{G_1} \quad 2 \quad 5 \quad 0] \quad Q_G^T = [Q_{G_1} \quad Q_{G_2} \quad Q_{G_3} \quad 0]$$

$$P_C^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 18] \quad Q_C^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 11]$$

La función objetivo a minimizar en este caso es la potencia generada por el generador 1, P_{G_1} , generador que asume las pérdidas del sistema. Se podría haber optado por obtener las pérdidas como suma de las pérdidas individuales en cada línea del sistema:

$$P_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (P_{ij} + P_{ji}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} \{2V_i V_j \cos(\theta_i - \theta_j) - V_i^2 - V_j^2\}$$

Esta posibilidad permitiría delimitar áreas concretas a optimizar.

Por último, es necesario imponer los distintos límites que se van a considerar en la solución:

- Potencias reactivas de los generadores:

$$-20 \leq Q_{G_1} \leq 20 \quad -5 \leq Q_{G_2} \leq 5 \quad -10 \leq Q_{G_3} \leq 10$$

- Tensiones:

$$0.95 \leq V_i \leq 1.05 \quad i = 1, \dots, 4$$

La solución óptima, obtenida mediante un algoritmo de optimización no lineal, se presenta en la Figura 11.5 y en la Tabla 11.10. Obsérvese que las pérdidas se han reducido en 5 MW respecto al caso inicial.

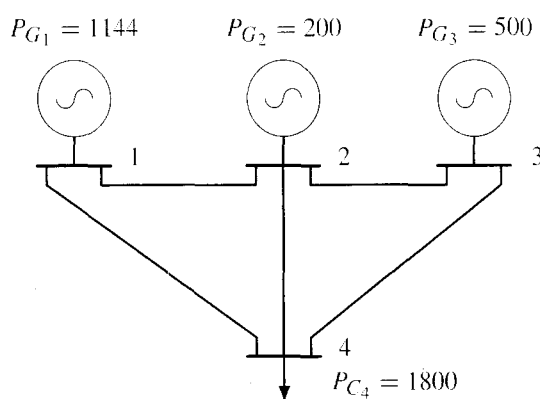


Figura 11.5 Estado óptimo en términos de pérdidas del sistema eléctrico del Problema 11.2.

Nudos							
i	V_i p.u.	θ_i Grados	P_C MW	Q_C Mvar	P_G MW	Q_G Mvar	Q_G^{\min}, Q_G^{\max} Mvar
1	1.050	0.00			1144	38	-2000, 2000
2	1.035	-4.69			200	504	-500, 500
3	1.048	-4.77			500	787	-1000, 1000
4	0.995	-7.25	1800	1100			

Tabla 11.10

Cabe destacar en este caso el significado de los *multiplicadores de Lagrange* asociados a las ecuaciones del sistema eléctrico: cuantifican el incremento de pérdidas por cada MW o Mvar adicional consumido en cada nudo eléctrico. En el caso de la potencia activa, coinciden, por tanto, con los *coeficientes de pérdidas* utilizados en el despacho económico para penalizar los generadores según su localización. En general, los coeficientes de pérdidas proporcionan una información muy útil de cara a cuantificar el efecto de la generación y del consumo, ya sea de potencia activa o reactiva, sobre las pérdidas del sistema. En este ejemplo, los valores de dichos *coeficientes de pérdidas incrementales* son los siguientes:

Ecuación	Coeficiente de pérdidas MW/MW	Ecuación	Coeficiente de pérdidas MW/Mvar
P_1	0.000	Q_1	0.0000
P_2	0.044	Q_2	0.0008
P_3	0.046	Q_3	0.0000
P_4	0.061	Q_4	0.0140

Tabla 11.11

Nótese que el nudo en el que se localiza el generador *de balance*, encargado de asumir las pérdidas, tiene un coeficiente de pérdidas incrementales nulo.

11.3. Obtener el *despacho económico* de los generadores de la Figura 11.6 imponiendo los límites de potencia de las líneas mediante un modelo lineal de la red de transporte.

Las curvas de costes de los generadores son las siguientes:

$$C_1(P_{G_1}) = 426.73 + 10.76P_{G_1} + 0.0031P_{G_1}^2 \text{ €/h} \quad 100 \leq P_{G_1} \leq 700$$

$$C_2(P_{G_2}) = 369.39 + 12.11P_{G_2} + 0.0010P_{G_2}^2 \text{ €/h} \quad 100 \leq P_{G_2} \leq 700$$

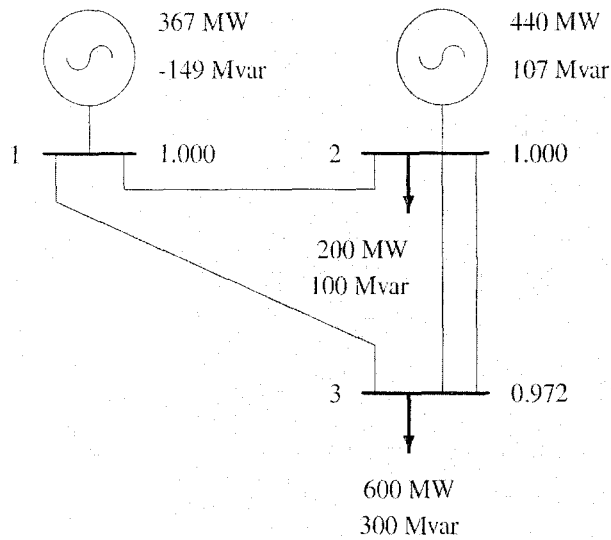


Figura 11.6 Red de 3 nudos del Problema 11.3.

Líneas (Base 100 MVA)								
<i>i</i>	<i>j</i>	Circuito	R	X	B	P_{\max}	P_{ij}	P_{ji}
1	2	1	0.006	0.06	1.8	200	138	-137
1	3	1	0.006	0.06	1.8	200	229	-226
2	3	1	0.003	0.03	0.8	500	189	-187
2	3	2	0.003	0.03	0.8	500	189	-187

Tabla 11.12

Nudos						
<i>i</i>	V_i p.u.	θ_i Grados	P_C MW	Q_C Mvar	P_G MW	Q_G Mvar
1	1.000	0.0			367	-149
2	1.000	-4.78	200	100	440	107
3	0.972	-7.98	600	300		

Tabla 11.13

Resolución

El *despacho económico clásico*, sin considerar pérdidas, proporciona el siguiente reparto de la potencia coconsumida en el sistema:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C_2 = \lambda \\ 350 &= P_{G_1} + P_{G_2} \end{aligned} \right\} \quad P_{G_1} = 359.76 \text{ MW} \quad P_{G_2} = 440.24 \text{ MW}$$

con un coste total de operación de $C_T = C_1 + C_2 = 10593.48 \text{ €/h}$, y un coste incremental $\lambda = 12.99 \text{ €/MWh}$.

El estado del sistema correspondiente a dicho reparto es el que se muestra en la Figura 11.6, donde el generador 1 ha asumido las pérdidas en el transporte, pérdidas que no se consideraron al realizar el despacho económico. Puede observarse en dicho estado que la línea "1-3" está sobrecargada, por lo que el despacho económico obtenido no es viable en la práctica.

Con el fin de imponer las restricciones a los flujos de potencia, se va a utilizar el modelo lineal del sistema eléctrico definido por las ecuaciones del *flujo de cargas en continua*:

$$P_i = \sum_j P_{ij} = \sum_j \approx \sum_j \frac{\theta_i - \theta_j}{x_{ij}} \quad \equiv \quad P = \hat{B} \cdot \theta$$

donde x_{ij} es la reactancia del elemento que une los nudos i y j . Para la red objeto de estudio:

$$P = \begin{bmatrix} P_{G_1} \\ P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16.667 & -16.667 \\ 83.333 & -66.667 \\ -66.667 & 83.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Sobre la base del modelo lineal, los flujos de potencia por las líneas se pueden expresar en función de las fases,

$$P_{ij} = \frac{\theta_i - \theta_j}{x_{ij}} \quad \equiv \quad P_f = X^{-1} A^T \theta$$

resultando:

$$P_f = \begin{bmatrix} P_{1,2} \\ P_{1,3} \\ P_{2,3} \\ P_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -16.667 \\ 0 & -16.667 \\ 33.333 & -33.333 \\ 33.333 & -33.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, el problema de optimización a resolver es el formado por las siguientes ecuaciones, con las potencias expresadas en p.u. respecto a 100 MW:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && C = 796.12 + 1076 \cdot P_{G_1} + 31 \cdot P_{G_1}^2 + 1211 \cdot P_{G_2} + 10 P_{G_2}^2 \\ &\text{sujeto a} && \begin{bmatrix} P_{G_1} \\ P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16.667 & -16.667 \\ 83.333 & -66.667 \\ -66.667 & 83.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \\ &&& 1 \leq P_{G_1} \leq 7 \\ &&& 1 \leq P_{G_2} \leq 7 \\ &&& \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & -16.667 \\ 0 & -16.667 \\ 33.333 & -33.333 \\ 33.333 & -33.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La solución del problema anterior, obtenida mediante un algoritmo de programación no lineal debido a que los costes son funciones cuadráticas, proporciona $P_{G_1} = 300$ y $P_{G_2} = 500$ MW. Los flujos de potencia en las líneas se obtienen a partir de las fases:

$$\theta^T = [-0.06 \quad -0.12] \implies P_f^T = [100 \quad 200 \quad 200 \quad 200]$$

con θ_i en radianes.

El coste de explotación resulta ahora 10608 €/h, incrementándose respecto al despacho óptimo debido a las restricciones del transporte.

El estado real del sistema con dicho reparto, siempre asumiendo que el generador 1 asume las pérdidas, se muestra en la Figura 11.7 y en las Tablas 11.14 y 11.15. Como puede observarse, el error asociado al modelo lineal del sistema es bastante pequeño. Por otra parte, cabe indicar que el coste de explotación aumentaría aún más debido a los 6 MW de pérdidas que no se han tenido en cuenta.

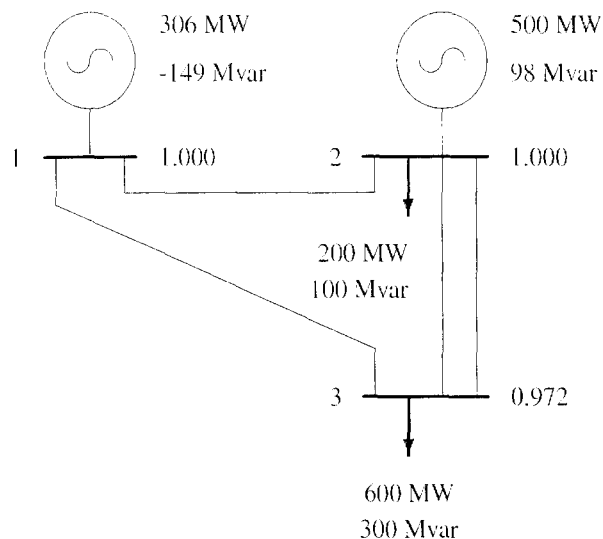


Figura 11.7 Estado óptimo de la red de 3 nudos del Problema 11.3.

Líneas					
<i>i</i>	<i>j</i>	Circuito	P_{max}	P_{ij}	P_{ji}
1	2	1	200	104	-103
1	3	1	200	202	-199
2	3	1	500	202	-200
2	3	2	500	202	-200

Tabla 11.14

Nudos						
<i>i</i>	V_i p.u.	θ_i Grados	P_C MW	Q_C Mvar	P_G MW	Q_G Mvar
1	1.000	0.0			306	-149
2	1.000	-3.60	200	100	500	98
3	0.972	-7.03	600	300		

Tabla 11.15

11.4. El sistema del problema anterior, en el estado que se muestra en la Figura 11.6, es vulnerable a la posible pérdida de una de las líneas que unen el generador 1 con el resto del sistema, debido a que cualesquiera de dichas contingencias conllevaría la sobrecarga de la otra línea y, con toda seguridad, la caída del sistema.

Obtener el despacho de generación que hace el sistema seguro ante la pérdida de una de dichas líneas, así como el coste asociado a la imposición de dicho criterio de seguridad. Utilizar para ello un flujo de cargas óptimo basado en el modelo lineal de la red de transporte.

Resolución

Como se puso de manifiesto en el problema anterior, el modelo lineal del sistema proporciona las siguientes ecuaciones para el estado de partida:

$$P = \begin{bmatrix} P_{G_1} \\ P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16.667 & -16.667 \\ 83.333 & -66.667 \\ -66.667 & 83.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$P_f = \begin{bmatrix} P_{1,2} \\ P_{1,3} \\ P_{2,3} \\ P_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -16.667 \\ 0 & -16.667 \\ 33.333 & -33.333 \\ 33.333 & -33.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Particularizando las ecuaciones anteriores para los estados *pos-contingencia*:

A: Pérdida de la línea "1-2":

$$P^a = \begin{bmatrix} P_{G_1} \\ P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -16.667 \\ 66.667 & -66.667 \\ -66.667 & 83.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2^a \\ \theta_3^a \end{bmatrix}$$

$$P_f^a = \begin{bmatrix} P_{1,2}^a \\ P_{1,3}^a \\ P_{2,3}^a \\ P_{2,3}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -16.667 \\ 33.333 & -33.333 \\ 33.333 & -33.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2^a \\ \theta_3^a \end{bmatrix}$$

B: Pérdida de la línea "1-3":

$$P^b = \begin{bmatrix} P_{G_1} \\ P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16.667 & 0 \\ 83.333 & -66.667 \\ -66.667 & 66.667 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2^b \\ \theta_3^b \end{bmatrix}$$

$$P_f^b = \begin{bmatrix} P_{1,2}^b \\ P_{1,3}^b \\ P_{2,3}^b \\ P_{2,3}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -16.667 \\ 0 & 0 \\ 33.333 & -33.333 \\ 33.333 & -33.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2^b \\ \theta_3^b \end{bmatrix}$$

Cabe destacar que se podría haber diferenciado la potencia de los generadores con el sistema íntegro de la que suministraría tras una contingencia, lo que supondría considerar actuaciones correctoras *a posteriori* sobre los generadores para eliminar las sobrecargas. Al no incluir dicha posibilidad, se está asumiendo que todas las actuaciones serán de tipo *preventivo*, antes de que tengan lugar las contingencias.

Una posibilidad que permite disminuir el tamaño del problema consiste en eliminar las fases como variables, relacionando directamente los flujos de potencia con las inyecciones en los nudos:

$$\left. \begin{array}{l} P = B \cdot \theta \\ P_f = X^{-1} A^T \theta \end{array} \right\} P_f = X^{-1} A^T B^{-1} P$$

donde la matriz B es \hat{B} reducida en la fila correspondiente al nudo de referencia.

Aplicando el modelo reducido a los tres estados del sistema que se contemplan:

▪ Caso base:

$$P_f = \begin{bmatrix} P_{1,2} \\ P_{1,3} \\ P_{2,3} \\ P_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.556 & -0.444 \\ -0.444 & -0.556 \\ 0.222 & -0.222 \\ 0.222 & -0.222 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

A: Pérdida de la línea "1-2":

$$P_f^a = \begin{bmatrix} P_{1,2}^a \\ P_{1,3}^a \\ P_{2,3}^a \\ P_{2,3}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

B: Pérdida de la línea "1-3":

$$P_f^b = \begin{bmatrix} P_{1,2}^b \\ P_{1,3}^b \\ P_{2,3}^b \\ P_{2,3}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Con ello, el problema de optimización a resolver queda en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && C = 796.12 + 1076 \cdot P_{G_1} + 31 \cdot P_{G_1}^2 + 1211 \cdot P_{G_2} + 10P_{G_2}^2 \\
 &\text{suje}to \text{ a} && \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -0.556 & -0.444 \\ -0.444 & -0.556 \\ 0.222 & -0.222 \\ 0.222 & -0.222 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 &&& \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 &&& \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{G_2} - 2 \\ -6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 &&& 1 \leq P_{G_1} \leq 7 \\
 &&& 1 \leq P_{G_2} \leq 7 \\
 &&& P_{G_1} + P_{G_2} = 8
 \end{aligned}$$

Obsérvese que ha sido necesario incluir una ecuación adicional de balance para incluir P_{G_1} como variable del problema.

La solución del problema de optimización proporciona $P_{G_1} = 200$ y $P_{G_2} = 600$ MW. Los flujos de potencia en los distintos escenarios resultan, expresados en MW:

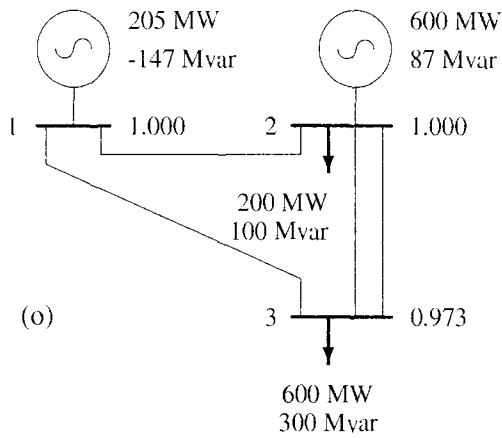
$$\begin{aligned}
 P_f &= \begin{bmatrix} 44 \\ 156 \\ 222 \\ 222 \end{bmatrix} \\
 P_f^a &= \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix} \\
 P_f^b &= \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 300 \\ 300 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El coste de explotación resulta ahora 10698 €/h, aumentando en 90 y en 105 €/h respecto al despacho económico con restricciones de red y al despacho económico sin restricciones, respectivamente. El estado real del sistema en los tres estados analizados se muestra en la Figura 11.8.

Cabe destacar la interpretación del redespacho debido a las restricciones de seguridad: al constituir las líneas "1-2" y "1-3" una interconexión del nudo 1 con el resto del sistema, y al estar sus potencias respectivas limitadas a 200 MW, la pérdida de cualesquiera de ellas obligaría a disminuir la potencia del generador 1 hasta 200 MW para corregir la sobrecarga de la línea que queda en servicio. Si se quiere evitar una actuación de emergencia *a posteriori*, no existe otra solución que limitar la potencia del generador 1 a 200 MW, incurriendo en el correspondiente sobrecoste.

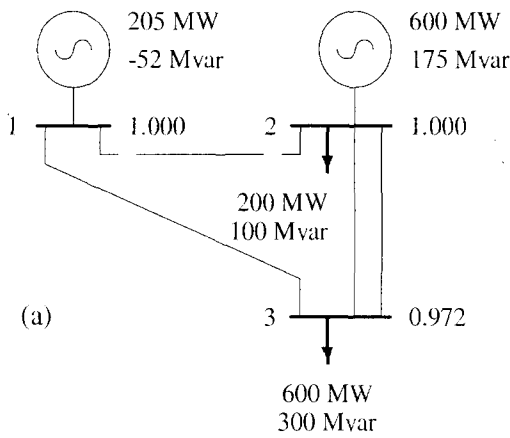
11.5. En el sistema de la Figura 11.9, la tensión de los nudos de consumo debe mantenerse entre unos límites de 0.95 y 1.05 p.u., actuando para ello sobre el generador y los dos transformadores. La tensión del generador puede oscilar entre 0.9 y 1.1 p.u.

Determinar las actuaciones a realizar sobre los transformadores y el generador para llevar las tensiones dentro de límites.



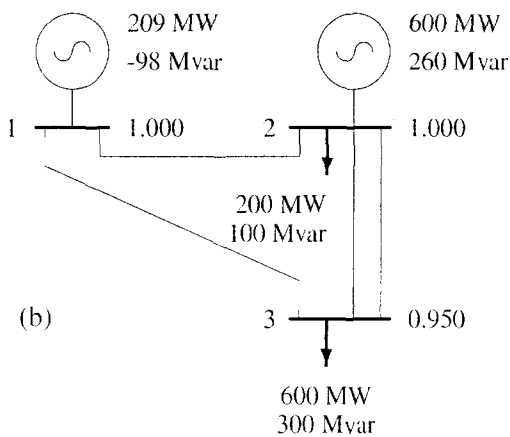
Líneas					
<i>i</i>	<i>j</i>	Circ.	P_{max}	P_{ij}	P_{ji}
1	2	1	200	47	-47
1	3	1	200	158	-156
2	3	1	500	223	-222
2	3	2	500	223	-222

Nudos				
<i>i</i>	V_i p.u.	θ_i Grados	P_G MW	Q_G Mvar
1	1.000	0.0	205	-147
2	1.000	-1.64	600	87
3	0.973	-5.46		



Líneas					
<i>i</i>	<i>j</i>	Circ.	P_{max}	P_{ij}	P_{ji}
1	2	1	200	0	0
1	3	1	200	205	-203
2	3	1	500	200	-199
2	3	2	500	200	-199

Nudos				
<i>i</i>	V_i p.u.	θ_i Grados	P_G MW	Q_G Mvar
1	1.000	0.0	205	-52
2	1.000	-3.74	600	175
3	0.972	-7.14		



Líneas					
<i>i</i>	<i>j</i>	Circ.	P_{max}	P_{ij}	P_{ji}
1	2	1	200	209	-207
1	3	1	200	0	0
2	3	1	500	303	-300
2	3	2	500	303	-300

Nudos				
<i>i</i>	V_i p.u.	θ_i Grados	P_G MW	Q_G Mvar
1	1.000	0.0	209	-98
2	1.000	-7.25	600	260
3	0.950	-12.47		

Figura 11.8 Estados de la red de 3 nudos del Problema 11.4: (o) caso base; (a) tras la pérdida de la línea 1-2; (b) tras la pérdida de la línea 1-3.

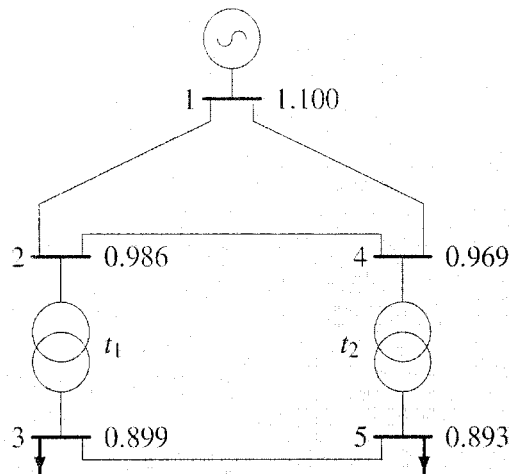


Figura 11.9 Red de 5 nudos del Problema 11.5.

Líneas y transformadores							
<i>i</i>	<i>j</i>	R	X	B	$S_{M\acute{a}x}$ (MVA)	<i>t</i>	$t^{min}, t^{max}, \Delta t$
1	2	0.005	0.03	0.05	500		
1	4	0.010	0.06	0.06	500		
2	3	0.000	0.05	0.00	500	1.00	0.9, 1.1, 0.01
2	4	0.005	0.03	0.05	500		
3	5	0.010	0.05	0.03	500		
4	5	0.000	0.05	0.00	500	1.00	0.9, 1.1, 0.01

Tabla 11.16

Nudos						
<i>i</i>	V_i p.u.	θ_i Grados	P_D MW	Q_D Mvar	P_G MW	Q_G Mvar
1	1.100	0.00			829	564
2	0.986	-7.34				
3	0.899	-20.97	400	100		
4	0.969	-8.79				
5	0.893	-21.55	400	100		

Tabla 11.17

Resolución

Este ejemplo se resuelve en el Problema 7.8 utilizando técnicas heurísticas basadas en las relaciones lineales entre las tensiones y las tomas de los transformadores.

Construyendo la matriz de admitancias nodales del sistema, función de las relaciones de transformación t_1 y t_2 , se obtiene:

$$Y_{ii} = G + jB$$

$$G = \begin{bmatrix} 8.108 & -5.405 & 0 & -2.703 & 0 \\ -5.405 & 10.811 & -5.405 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.846 & 0 & -3.846 \\ -2.703 & -5.405 & 0 & 8.108 & 0 \\ 0 & 0 & -3.846 & 0 & 3.846 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -48.594 & 32.432 & 0 & 16.216 & 0 \\ 32.432 & -\left(64.815 + \frac{20}{t_1}\right) & \frac{20}{t_1}j & 32.432 & 0 \\ 0 & \frac{20}{t_1} & -39.216j & 0 & +19.231 \\ 16.216 & 32.432 & 0 & -\left(48.594 + \frac{20}{t_2}\right) & \frac{20}{t_2} \\ 0 & 0 & 19.231 & \frac{20}{t_2} & -39.216 \end{bmatrix}$$

Eligiendo el nudo 1, único generador del sistema, como referencia para las fases ($\theta_1 = 0$), las ecuaciones del sistema son las siguientes:

$$P_i = P_{G_i} - P_{C_i} = V_i \sum_{j=1}^5 V_j \{G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)\} \quad i = 1, \dots, 5$$

$$Q_i = Q_{G_i} - Q_{C_i} = V_i \sum_{j=1}^5 V_j \{G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)\} \quad i = 1, \dots, 5$$

Donde las potencias generadas en los nudos, activa y reactiva, son datos de partida. No obstante, deben liberarse las potencias del generador de referencia para que asuma los posibles cambios en las pérdidas (MW y Mvar) del sistema tras las actuaciones:

$$\begin{aligned} P_C^T &= [0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 4] & Q_C^T &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \\ P_G^T &= [P_{G_1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] & Q_G^T &= [Q_{G_1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned}$$

A efectos de minimizar la magnitud de las actuaciones sobre los transformadores, la función objetivo a minimizar es una penalización cuadrática de los incrementos de las dos relaciones de transformación:

$$C = (\Delta t_1)^2 + (\Delta t_2)^2$$

Nótese que, al no penalizar la tensión del generador ni la reactiva que éste proporciona, se está favoreciendo su utilización como variable de control.

Por último, es necesario imponer los distintos límites que se van a considerar en la solución:

- Tensiones:

$$0.95 \leq V_i \leq 1.05 \quad i = 2, \dots, 5 \quad 0.9 \leq V_1 \leq 1.1$$

- Relaciones de transformación:

$$0.9 \leq 1.0 + \Delta t_k \leq 1.1 \quad k = 1, 2$$

La solución óptima del problema de optimización proporciona las siguientes consignas:

$$V_1 = 1.1 \quad P_{G_1} = 828 \text{ MW} \quad Q_{G_1} = 535 \text{ Mvar} \quad t_1 = 0.966 \quad t_2 = 0.952$$

En primer lugar, es necesario discretizar las relaciones de transformación a los valores discretos que imponen las tomas, redondeando por exceso. Con ello, las actuaciones sobre el sistema se reducen a imponer:

$$t_1 = 0.96 \quad t_2 = 0.95 \quad V_1 = 1.1$$

El estado del sistema tras llevar a la práctica las anteriores actuaciones se presenta en la Figura 11.10, y en la Tabla 11.18.

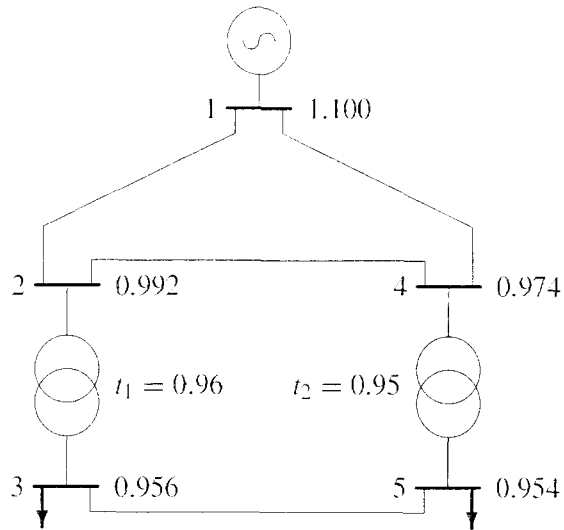


Figura 11.10 Estado óptimo en términos del coste de generación del sistema eléctrico del Problema 11.5.

Nudos				
i	V_i p.u.	θ_i Grados	P_G MW	Q_G Mvar
1	1.100	0.00	828	532
2	0.992	-7.34		
3	0.956	-19.56		
4	0.974	-8.78		
5	0.954	-20.08		

Tabla 11.13

Cabe destacar que, al no penalizar la actuación sobre el generador, éste se ha utilizado hasta llegar a su tensión máxima, actuando sobre los transformadores con los incrementos mínimos necesarios para terminar de llevar las tensiones dentro de límites.

Parte IV

**ANÁLISIS DE FALTAS Y DE
ESTABILIDAD**

FALTAS SIMÉTRICAS

El estudio de faltas en un sistema eléctrico es una tarea imprescindible para la selección de interruptores, el dimensionado de diversa aparellaje y el ajuste y coordinación de protecciones. Las faltas, que pueden tener muy distintos orígenes, son fenómenos rápidos, de entre 20 ms y 1 s de duración, hasta que son despejadas por los interruptores. En ese intervalo de tiempo se aprecian distintas componentes en las ondas de intensidad.

En el desarrollo de la falta, dependiendo del instante en que se produzca ésta, puede aparecer una componente de continua de decaimiento exponencial. Superpuesta a ella, habrá una senoide con envolvente exponencial. Dicha envolvente, antes de estabilizarse en un régimen permanente, sufre en las proximidades de los generadores un decaimiento en un período que llamamos transitorio. Los valores típicos de las intensidades en este período se estudian considerando un régimen senoidal permanente en el que, como reactancias de los generadores próximos, se consideran sus reactancias transitorias X'_d . Previamente a este período puede incluso distinguirse un período de decaimiento más rápido conocido como período subtransitorio, gobernado por las reactancias subtransitorias X''_d . Pasados estos períodos, la senoide se estabiliza en un régimen permanente en el que los generadores se consideran con sus reactancias síncronas X_d .

Las faltas simétricas, pese a ser poco frecuentes, resultan de especial interés en tanto que usualmente producen las mayores intensidades de cortocircuito. De especial relevancia resultan los valores de la intensidad de cortocircuito en los instantes de actuación de los interruptores, los cuales se utilizarán para su dimensionado y en cuyo cálculo, de acuerdo a las normas, habrá que incluir tanto la componente de continua como los valores calculados para el fasor J_{cc} en el período subtransitorio. Para el correcto calibrado de los relés de protección pueden interesarnos los valores del fasor J_{cc} tanto en el período subtransitorio como en el régimen permanente.

El análisis fasorial de una falta simétrica requiere, en primer lugar, establecer en qué marco temporal nos interesan las magnitudes, para utilizar las reactancias apropiadas en las máquinas síncronas próximas al punto de fallo.

Dada una red en ausencia de falta, el estudio de la falta trifásica equilibrada a través de impedancia Z_f puede realizarse mediante un circuito monofásico equivalente, véase la Figura 12.1.

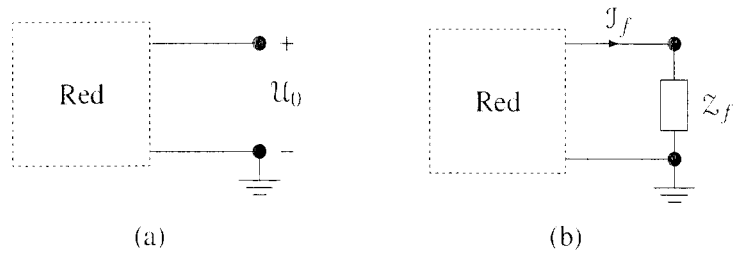


Figura 12.1 Circuito monofásico de la red: (a) sin falta, (b) con falta.

Si sólo estamos interesados en los incrementos que sufren las magnitudes del circuito, podemos usar el teorema de compensación (su interpretación como aplicación del teorema de superposición es también inmediata), Figura 12.2. Para ello podemos utilizar la red incremental, con todas las fuentes anuladas, alimentada por una fuente de intensidad con el valor de la propia intensidad de falta J_f . En el caso de una falta franca, $Z_f = 0$, dicha intensidad sería la de cortocircuito, que, en el caso de disponer de la tensión previa a la falta, U_0 , y de la impedancia equivalente de la red en el punto del fallo, Z_T , podríamos obtener como $J_{cc} = U_0/Z_T$. Así mismo, en este caso de falta franca, puede usarse otra alimentación en la red incremental: una fuente de tensión invertida de valor U_0 .

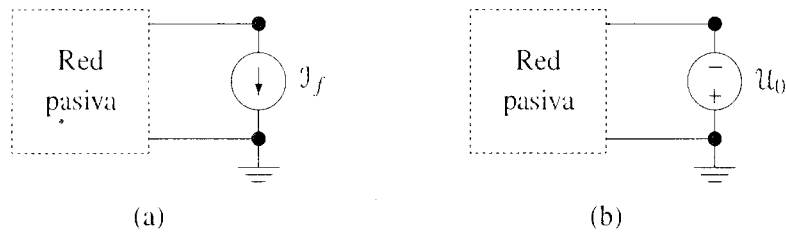


Figura 12.2 Red incremental: (a) basada en la intensidad de falta, (b) basada en la tensión previa a la falta (cortocircuito).

Tanto en la resolución de la falta basada en la impedancia equivalente como la que implicase resolver toda la red, es frecuente usar la simplificación de despreciar el estado de carga (las intensidades del fallo son mucho mayores que las de las cargas), con lo que aproximadamente las tensiones previas al fallo son las de vacío:

$$U_0 = U_N = I | \underline{0} \text{ p.u.}$$

En un sistema de gran dimensión, el procedimiento para el cálculo de una falta en el nudo i , se basa en calcular, en primer lugar, la intensidad de falta:

$$J_{fi} = \frac{U_i^0}{Z_{ii} + Z_f}$$

donde Z_{ii} es el correspondiente elemento diagonal de la matriz de impedancias nodales, inversa de la

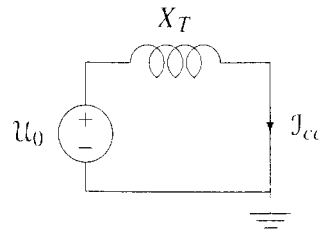


Figura 12.3 Figura para ilustrar la potencia de cortocircuito.

matriz de admitancias nodales de la red, $Z_n = Y_n^{-1}$. Cada término Z_{ii} se interpreta como la impedancia equivalente de la red vista desde el nudo i .

En segundo lugar, mediante la aplicación del teorema de compensación, Figura 12.2, podemos obtener todos los incrementos de tensión en los nudos del circuito para el fallo en el nudo i , mediante el uso de las ecuaciones nodales:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & Z_{ji} & & \\ & Z_{ii} & & \\ & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{fi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\Delta u_j = \frac{Z_{ji} u_i^0}{Z_{ii} + Z_f}$$

La tensión en falta la obtenemos de:

$$u_j = u_j^0 + \Delta u_j$$

En una tercera fase, conocidas las tensiones e impedancias de la red, podríamos encontrar la intensidad por cualquier arco ij .

La potencia de cortocircuito, S_{cc} , es un concepto que básicamente proporciona una idea del valor de la intensidad de cortocircuito en un nudo de la red. Atendiendo a la Figura 12.3:

$$S_{cc} = V_0 I_{cc} = \frac{V_0^2}{X_T}$$

En p.u., y aproximando las tensiones a las nominales, queda:

$$S_{cc} = \frac{1}{X_T}$$

En cuanto a los valores deseables de S_{cc} , existen intereses contradictorios. Por un lado interesa S_{cc} pequeña, para limitar las intensidades de cortocircuito y por tanto las capacidades de corte necesarias en los interruptores. Por otro lado interesa S_{cc} grande, como medida de la rigidez de la tensión en el punto.

En la práctica encontramos que S_{cc} crece con la interconexión de sistemas, así como con los niveles de tensión de los que tratemos.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 12.1. Del sistema de la Figura 12.4 se sabe que se produce un cortocircuito simétrico en la barra 1 y que los datos del sistema, con magnitudes p.u. correspondientes a $S_B = 300$ MVA, son los siguientes:

Generadores	300 MVA	$X_d'' = 0.08j$ p.u.
Trafos	300 MVA	$X = 0.12j$ p.u.
Línea	sin pérdidas	$X_L = 0.2j$ p.u.
Carga 1	resistiva	$R_1 = 2$ p.u.

Tabla 12.1

Se sabe, igualmente, que las fuentes con las que se modelan los dos generadores tienen tensiones p.u. de $1 \angle 0$.

Suponiendo cortocircuito rígido, calcular la componente de alterna de la J_{cc} inmediatamente después del fallo. Calcular también las tensiones en ambas barras, la intensidad que atraviesa la línea y las suministradas por los generadores.

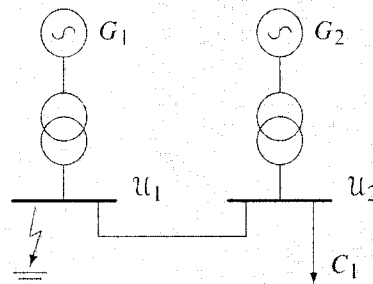


Figura 12.4 Sistema con fallo.

Resolución

En este tipo de problemas no se considera el estado de carga previo al fallo, por lo que, pese a especificarse la carga en el enunciado, el sistema se considerará en vacío, como se muestra en la Figura 12.5.

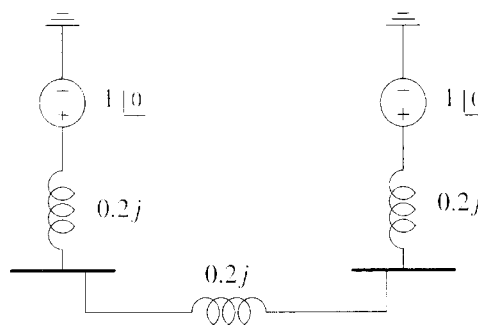


Figura 12.5 Modelo del sistema.

Calcularemos en primer lugar el equivalente Thevenin del sistema en el punto del fallo. Para ello, nos ayudaremos de la Figura 12.6, que corresponde al sistema en el que se han anulado las fuentes de tensión (modelo incremental). Basándonos en ella obtenemos:

$$Z_T = \frac{0.2j \cdot 0.4j}{0.2j + 0.4j} = 0.1333j$$

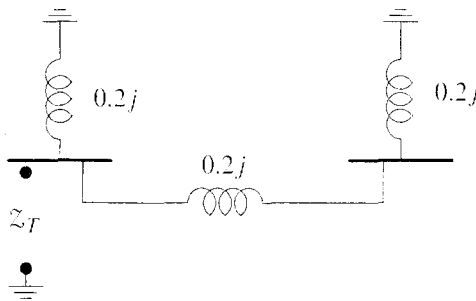


Figura 12.6 Sistema pasivado.

Dicho valor de Z_T es el que debe considerarse en el equivalente de la Figura 12.7. Por tanto, la intensidad de corto vale:

$$J_{cc} = \frac{1}{Z_T} = -7.5j = 7.5 \angle -90$$

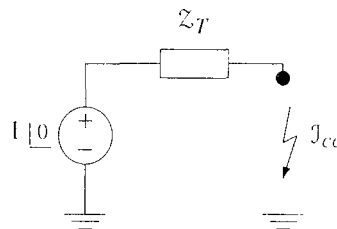


Figura 12.7 Equivalente Thevenin.

El circuito de la Figura 12.8 (sistema pasivado y fallo sustituido por una fuente) nos permite obtener la contribución de cada generador al cortocircuito:

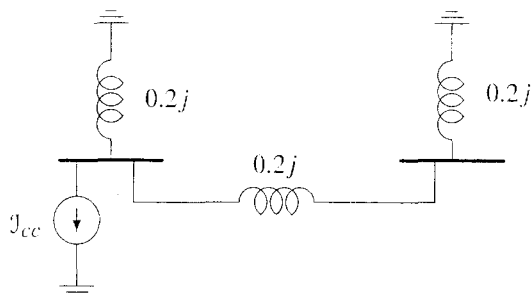


Figura 12.8 Sustitución del cortocircuito.

Aplicando la expresión del divisor de intensidades:

$$J_1 = \frac{\frac{1}{0.2j}}{\frac{1}{0.2j} + \frac{1}{0.4j}} J_{cc} = 5 \angle -90$$

$$J_2 = \frac{\frac{1}{0.4j}}{\frac{1}{0.2j} + \frac{1}{0.4j}} J_{cc} = 2.5 \angle -90$$

y conseguidas éstas, la obtención de las tensiones es inmediata

$$\Delta u_1 = -0.2j \cdot I_1 = -1$$

$$\Delta u_2 = -0.2j \cdot I_2 = -0.5 \underline{0}$$

El estado resultante, ignorando el estado de carga previo al fallo, es el que se muestra en la Figura 12.9.

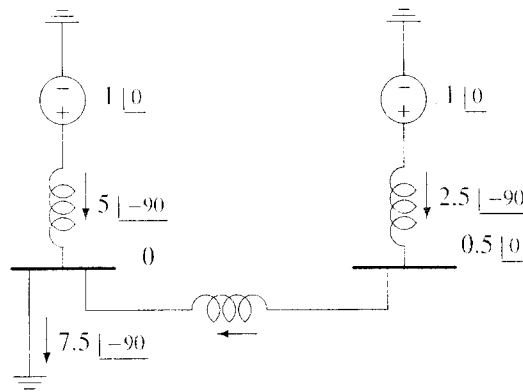


Figura 12.9 Estado tras el corto.

En la Figura 12.10 se muestra el resultado si se modela la carga como una resistencia. Se observa cómo la variación del resultado es mínima.

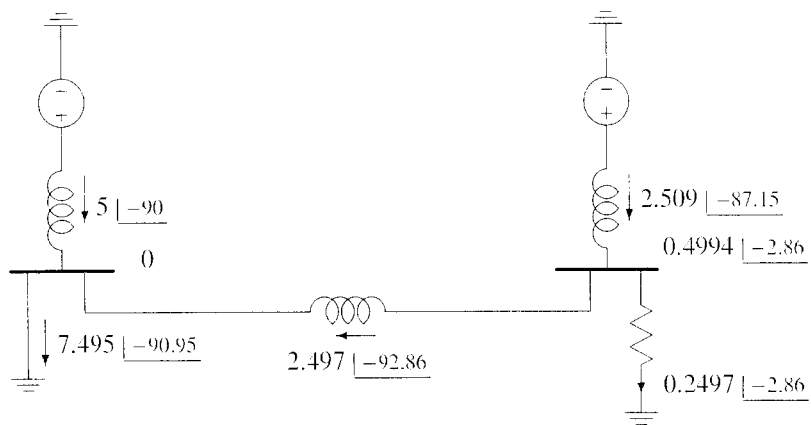


Figura 12.10 Estado tras el corto considerando la carga previa.

12.2. La matriz de impedancia de nudos de una red, usando reactancias subtransitorias, es:

$$Z_n = j \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 1.2 \end{bmatrix}$$

Calcular la corriente subtransitoria en un fallo trifásico en la barra 2, y la tensión durante el fallo en las barras 1 y 3 (sistema en vacío, tensión antes del fallo 1 p.u.).

Resolución

Puesto que la impedancia Thevenin en el nudo 2 es Z_{22} , la intensidad de corto será:

$$J_{cc} = \frac{V^0}{Z_{22}} = \frac{1}{0.8j} = 1.25 \angle -90$$

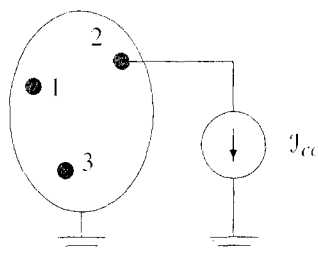


Figura 12.11 Sistema en situación de fallo.

En condiciones de fallo, como se ilustra en el esquema de la Figura 12.11, podemos obtener los incrementos respecto a estado de vacío como:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix} = Z_n \begin{bmatrix} 0 \\ -J_{cc} \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= -Z_{12} J_{cc} = -0.1j \cdot 1.25 \angle -90 = -0.125 \\ \Delta u_3 &= -Z_{32} J_{cc} = -0.5j \cdot 1.25 \angle -90 = -0.625 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + \Delta u_1 = 0.875 \\ u_3 &= 1 + \Delta u_3 = 0.375 \end{aligned}$$

- 12.3.** Los 2 generadores de la Figura 12.12 alimentan a través de transformadores elevadores las barras 1 y 2. La reactancia equivalente para ambos conjuntos generador-transformador es de 0.3 p.u., en sus respectivas bases. Las tres líneas tienen una impedancia de 0.2 p.u. en 100 MVA. Encontrar, mediante métodos matriciales, la potencia de cortocircuito, S_{cc} , de las tres barras y las intensidades por las líneas ante un cortocircuito rígido en la barra 3.

Nota: $S_B = 50$ MVA y $u_i = 1$ p.u. antes del fallo.

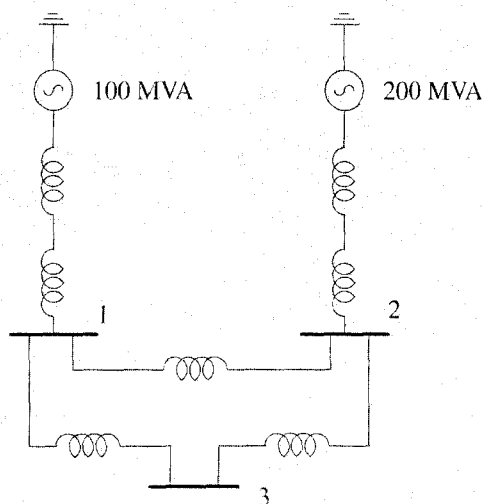


Figura 12.12 Sistema.

Resolución

La potencia de cortocircuito da una idea de la severidad del fallo:

$$S_{cc} = |J_{cc}| \cdot |E| = \frac{E^2}{X_T} \approx \frac{1}{X_T}$$

Conversión de base:

$$Z_{G1} = \frac{50}{100} \cdot 0.3 = 0.15$$

$$Z_{G2} = \frac{50}{200} \cdot 0.3 = 0.075$$

$$Z_L = \frac{50}{100} \cdot 0.2 = 0.1$$

El esquema en p.u. de la red se muestra en la Figura 12.13.

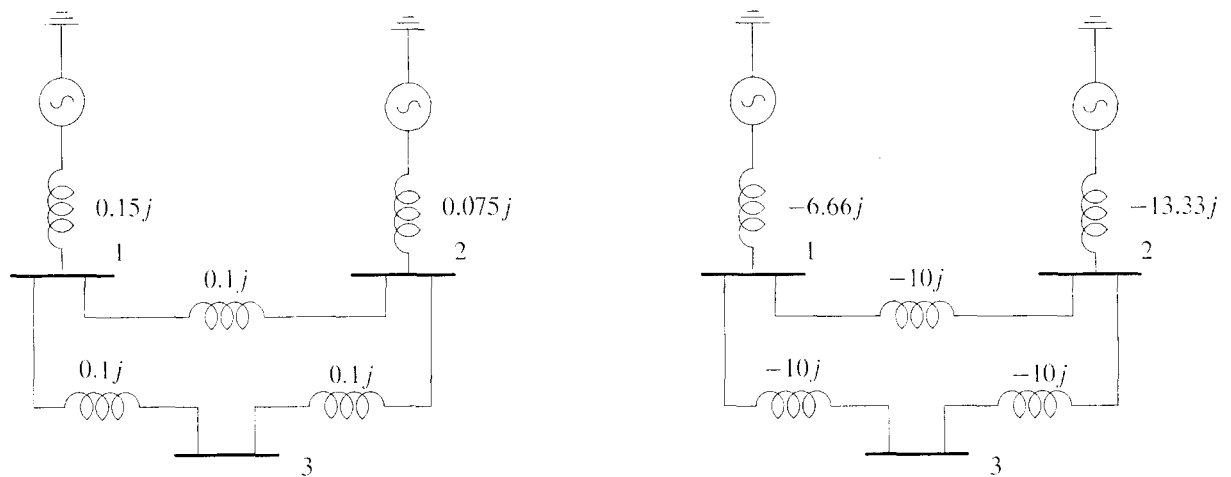


Figura 12.13 Impedancias del sistema, a la izquierda, admitancias a la derecha.

Construyendo la matriz de admitancias

$$Y = j \begin{bmatrix} -26.6667 & 10 & 10 \\ 10 & -33.3333 & 10 \\ 10 & 10 & -20 \end{bmatrix}$$

y la matriz de impedancias de nudos

$$Z_n = Y^{-1} = j \begin{bmatrix} 0.0729 & 0.0386 & 0.0557 \\ & 0.0557 & 0.0471 \\ & & \ddots & 0.1014 \end{bmatrix}$$

Las intensidades de cortocircuito en los distintos nudos, J_{fi} , se obtienen usando las impedancias Thevenin, $Z_{i,i}$:

$$J_{f1} = \frac{1}{0.0729j} = -13.7255j \text{ p.u.}$$

$$J_{f2} = \frac{1}{0.0557j} = -17.9487j \text{ p.u.}$$

$$J_{f3} = \frac{1}{0.1014j} = -9.8592j \text{ p.u.}$$

Las S_{cc} de los nudos son, por tanto:

$$S_{cc1} \approx |J_{f1}| = 13.7255 \text{ p.u.}$$

$$S_{cc2} \approx |J_{f2}| = 17.9487 \text{ p.u.}$$

$$S_{cc3} \approx |J_{f3}| = 9.8592 \text{ p.u.}$$

Como era de esperar, el más crítico es el fallo en la barra 2 (mayor generador) y el nudo menos crítico es la barra 3 (generador más lejano).

En cuanto al caso concreto de un cortocircuito en el nudo 3, los incrementos en las magnitudes se obtienen, por el teorema de compensación, a partir del circuito de la Figura 12.14.

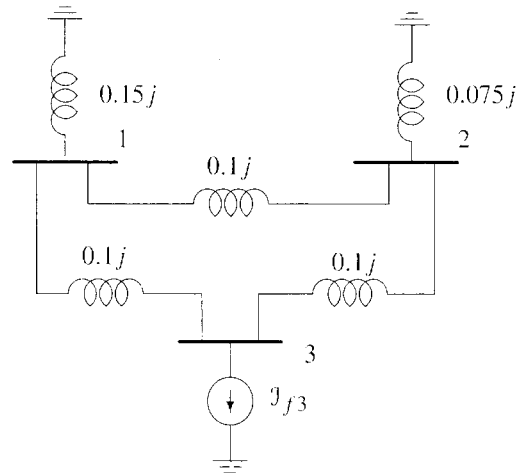


Figura 12.14 Circuito para compensación.

Las ecuaciones nodales son:

$$Y \cdot \Delta V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -J_{f3} \end{bmatrix}$$

$$\Delta V = Z_n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -J_{f3} \end{bmatrix}$$

Sólo es necesaria la tercera columna de Z_n para el producto anterior. Así, considerando tensiones iniciales de valor unidad e $J_{cc} = J_{f3} = -9.8592j$:

$$U_1 = U_1^0 - Z_{13} \cdot J_{cc} = 0.4507 \text{ p.u.}$$

$$U_2 = U_2^0 - Z_{23} \cdot J_{cc} = 0.5352 \text{ p.u.}$$

$$U_3 = U_3^0 - Z_{33} \cdot J_{cc} = 0 \quad (\text{por ser corto rígido})$$

Las intensidades por las líneas son:

$$J_{12} = \frac{U_1 - U_2}{Z_{12}} = 0.8451j$$

$$J_{23} = \frac{U_2 - 0}{Z_{23}} = -5.3521j$$

$$J_{13} = \frac{U_1 - 0}{Z_{13}} = -4.507j$$

Como se ha visto, sólo ha sido necesario calcular la tercera columna de Z_n , lo cual podría haberse realizado eficientemente, en un caso de tamaño realista, mediante técnicas de vectores dispersos (eliminación

rápida hacia adelante y sustitución hacia atrás):

$$Y \cdot \begin{bmatrix} \tilde{z}_{13} \\ \tilde{z}_{23} \\ \tilde{z}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

12.4.

La red de la Figura 12.15 tiene una matriz de impedancias de nudos:

$$\tilde{z}_n = j \begin{bmatrix} 0.6026 & 0.1025 & 0.4026 \\ 0.1025 & 0.1025 & 0.1025 \\ 0.4026 & 0.1025 & 0.5226 \end{bmatrix}$$

que ya incluye la reactancia del generador $X_g'' = 0.1025$ p.u.

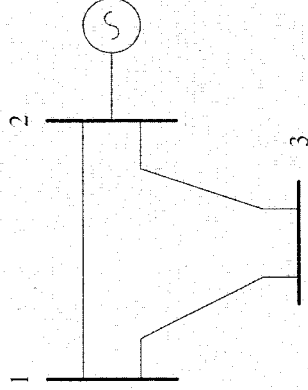


Figura 12.15 Sistema.

Se decide instalar en el nodo 1 un generador idéntico al existente. Calcular la nueva corriente de cortocircuito para un cortocircuito rígido en el nodo 3 y las nuevas tensiones tras el corto. Suponer tensiones iniciales 1 p.u.

Resolución

La matriz \tilde{z}_n relaciona las tensiones en los nudos con las intensidades inyectadas según el modelo $V = \tilde{z}_n \cdot J_n$, ilustrado por la Figura 12.16.

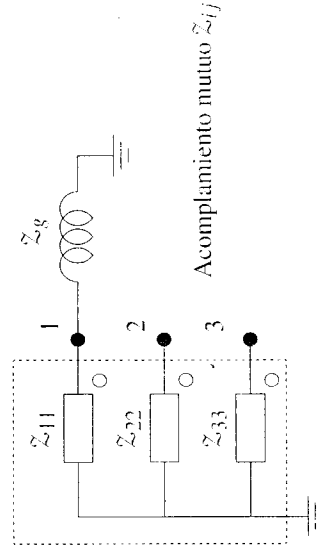


Figura 12.16 Modelo del sistema.

Al añadir un nuevo generador, el equivalente Thevenin desde el nodo 3 ha cambiado. La nueva impedancia del equivalente se obtiene resolviendo:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_{11} & \tilde{z}_{12} & \tilde{z}_{13} \\ \tilde{z}_{21} & \tilde{z}_{22} & \tilde{z}_{23} \\ \tilde{z}_{31} & \tilde{z}_{32} & \tilde{z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

con $J_1 = \frac{-u_1}{Z_g}$. Dichas ecuaciones corresponden al circuito de la Figura 12.17.

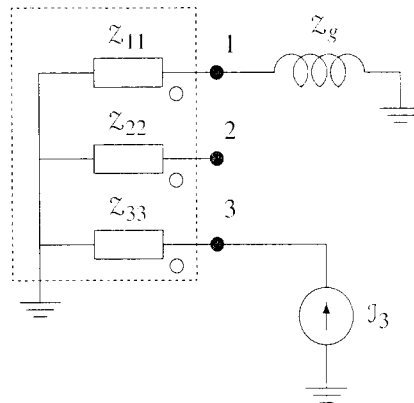


Figura 12.17 Circuito para la nueva impedancia equivalente.

Por lo tanto, tendremos

$$u_1 = Z_{11} \frac{-u_1}{Z_g} + Z_{13} J_3$$

$$u_3 = Z_{31} \frac{-u_1}{Z_g} + Z_{33} J_3$$

y eliminando u_1 :

$$u_3 = \left[Z_{33} - \frac{Z_{31} Z_{13}}{Z_g + Z_{11}} \right] J_3$$

Luego $Z'_{33} = \frac{u_3}{J_3} = 0.2927j$, y por tanto

$$J_{cc} \approx \frac{1}{X'_{33} j} = -3.4164j$$

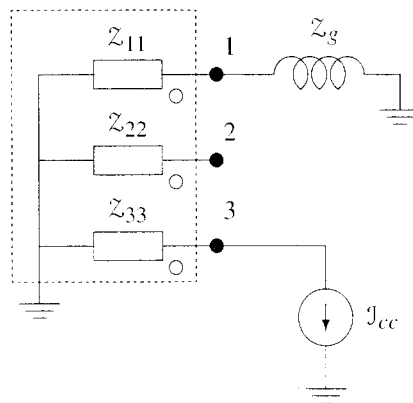


Figura 12.18 Circuito para compensación.

Los incrementos se obtienen de resolver el circuito de compensación de la Figura 12.18:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix} = Z_n \begin{bmatrix} -\frac{\Delta u_1}{Z_g} \\ 0 \\ -J_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.15 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Y las tensiones quedan:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + \Delta u_1 = 0.8 \\ u_2 &= 1 + \Delta u_2 = 0.85 \end{aligned}$$

Z'_{33} también se podría haber obtenido a partir de Y_n :

$$Y_n = \begin{bmatrix} -3.5j & j & 2.5j \\ j & -12.422j & 1.666j \\ 2.5j & 1.666j & -4.166j \end{bmatrix}$$

modificándola con $Y_g = -9.756j$

$$Y_n = j \begin{bmatrix} -13.256 & 1 & 2.5 \\ 1 & -12.422 & 1.666 \\ 2.5 & 1.666 & -4.166 \end{bmatrix}$$

e invirtiendo para obtener la matriz de impedancias de nudos tras la modificación

$$Z' = j \begin{bmatrix} 0.0876 & 0.0149 & 0.05853 \\ & 0.0876 & 0.0439 \\ & & \underline{0.2927} \end{bmatrix}$$

De este modo se ha conseguido el mismo valor $Z'_{33} = 0.2927j$.

12.5. Una red de alta tensión con matriz de admitancias de nudos:

$$y_n = \begin{bmatrix} 0.12 - j & -0.02 + 0.2j & -0.1 + 0.8j \\ -0.02 + 0.2j & 0.1 - 1.5j & -0.08 + 0.9j \\ -0.1 + 0.8j & -0.08 + 0.9j & 0.18 - 2j \end{bmatrix}$$

se alimenta por la barra 1, de potencia de cortocircuito $S_{cc} = 10$ p.u., y se desea estimar la intensidad de pico ante un cortocircuito trifásico en la barra 2 para su posterior uso en el cálculo de esfuerzos mecánicos. Dicha estimación se hará de acuerdo a la norma IEC 909-88 (equivalente a UNE 21-239-94), que para el cálculo de la intensidad de pico en cortocircuitos lejanos a alternadores ofrece varios métodos. Utilice el que se basa en la relación R/X en el punto del defecto:

$$I_{pico} \approx \sqrt{2} \chi_b I_{cc}$$

Donde $\chi_b = 1.15(1.02 + 0.98e^{-3\frac{R}{X}})$, salvo en redes de baja tensión, en que está limitado a 1.8 y en redes de alta tensión con el límite 2.0.

Resolución

Introducimos en y_n la reactancia del equivalente Thevenin de la alimentación, $1/0.1j = -10j$:

$$y'_n = \begin{bmatrix} 0.12 - 11j & -0.02 + 0.2j & -0.1 + 0.8j \\ -0.02 + 0.2j & 0.1 - 1.5j & -0.08 + 0.9j \\ -0.1 + 0.8j & -0.08 + 0.9j & 0.18 - 2j \end{bmatrix}$$

Invirtiendo, conseguimos la matriz de impedancias nodal:

$$z'_n = y_n'^{-1} = \begin{bmatrix} 0.00018 + 0.0962j & -0.00267 + 0.0494j & -0.00244 + 0.0608j \\ -0.00267 + 0.0494j & 0.0508 + 0.9353j & 0.0215 + 0.4406j \\ -0.00244 + 0.0608j & 0.0215 + 0.4406j & 0.0527 + 0.7186j \end{bmatrix}$$

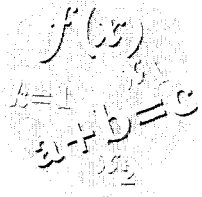
La impedancia Thevenin de la red en el punto del fallo a estudiar es $Z_T = 0.0508 + 0.9353j$. Por tanto $I_{cc} = 1/|Z_T| = 1.0676$. Para la estimación de la intensidad de pico necesitamos

$$\chi_b = 1.15(1.02 + 0.98e^{-3\frac{R}{X}}),$$

que puesto que $R = 0.0508$ y $X = 0.9353$ queda $\chi_b = 2.13$. Debemos imponer por tanto la cota $\chi_b = 2$ de redes de alta con lo que obtenemos:

$$I_{\text{pico}} \approx 2\sqrt{2} 1.0676 = 3.0196$$

FALTAS ASIMÉTRICAS



En las faltas asimétricas, la participación de las tres fases del sistema no es equilibrada. Algunas de estas faltas son la falta fase-tierra, la falta fase-fase, fase-fase-tierra, apertura de un conductor y apertura de dos conductores.

En estas faltas, resulta interesante el cálculo en régimen fasorial del régimen permanente que alcanzan las intensidades de falta, para el calibrado de protecciones o el dimensionado de las puestas a tierra de los elementos, así como del régimen subtransitorio, para la selección de interruptores.

La técnica fundamental para el estudio de los circuitos desequilibrados con los que nos encontramos es la transformación a componentes simétricas. En ellas, una terna de magnitudes del dominio de fases, p.e., tensiones

$$u = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix}$$

se transforma en otra terna de secuencias (homopolar, directa e inversa)

$$u_s = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

mediante la relación

$$u = T u_s$$

donde T , la matriz de Fortescue, viene dada por:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

siendo $a = 1 \angle 120^\circ$.

El paso inverso se realiza con $u_s = T^{-1}u$, siendo:

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}$$

Un elemento trifásico de tipo impedancia viene regido por una ecuación $U = ZJ$, que tras pasar tensiones e intensidades a componentes simétricas, nos da una relación $U_s = Z_s J_s$, donde la matriz del elemento pasa a ser:

$$Z_s = T^{-1} Z T$$

Las componentes simétricas pueden usarse directamente para el cálculo de la potencia compleja:

$$S = U_a J_a^* + U_b J_b^* + U_c J_c^* = 3U_0 J_0^* + 3U_1 J_1^* + 3U_2 J_2^*$$

Bajo la hipótesis de que las impedancias de un elemento trifásico posean simetría cíclica, está garantizado que su conversión al dominio de las componentes simétricas conduce a un modelo desacoplado en secuencias, Z_s diagonal, con lo que pasamos a hablar de sus impedancias homopolar, Z_0 , directa, Z_1 , e inversa, Z_2 .

LÍNEAS

En las líneas sin transposiciones no existe simetría cíclica, por lo que su descripción en el dominio de las componentes simétricas conduce a acoplamientos entre las mismas débiles o moderados, que complican su tratamiento exacto.

Cuando existan transposiciones, o las supongamos porque nos baste con un tratamiento aproximado, tendremos $Z_0 = Z_p + 2Z_m$, $Z_1 = Z_2 = Z_p - Z_m$, siendo Z_p la impedancia propia de la fase de la línea y Z_m la impedancia mutua entre fases. Cabrá esperar, por tanto, valores de Z_0 mayores que los de $Z_1 = Z_2$, que en la práctica conllevará una reactancia X_0 unas 3 veces mayor que las $X_1 = X_2$.

GENERADOR

En secuencia directa se utiliza un modelo con el generador en vacío (E_0) y reactancia de secuencia directa igual a la reactancia directa del generador para el período bajo estudio: X_d , X'_d o X''_d .

En secuencia inversa no se utiliza fuente alguna, y como reactancia se usa la reactancia subtransitoria X''_d .

En secuencia homopolar, teniendo en cuenta que sólo influyen flujos de dispersión, suele tomarse $X_0 \approx 0$. Hay que tener en cuenta la conexión del neutro a tierra Z_n , que se introduce como una impedancia $3Z_n$.

TRANSFORMADOR

Se trata de un elemento estático en el que $X_1 = X_2 = X_{cc}$. Sin embargo, hay que hacer consideraciones especiales para el tratamiento tanto del ángulo del grupo de conexión como de la impedancia para la secuencia homopolar.

La consideración respecto al grupo de conexión se refiere a que el desfase introducido en secuencia inversa es de signo contrario al de secuencia directa.

Por otra parte, en el modelado de la secuencia homopolar debemos tener en cuenta que, para que pueda entrar homopolar en el devanado, es imprescindible que se trate de un devanado en estrella con neutro a tierra, y que los demás devanados (secundario e incluso terciario) permitan la circulación de homopolar, bien estando en estrella con neutro a tierra o bien estando en triángulo. En la Figura 13.1 se muestran algunas configuraciones.

En cuanto a la impedancia homopolar que se deberá considerar en el devanado, Z_0 , tendremos en cuenta que en los transformadores de 3 columnas, al no existir camino de retorno para el flujo homopolar, el valor de Z_0 es muy elevado.

Habrà de tenerse en cuenta, igualmente, que la posible impedancia que existiese entre neutro y tierra deberá incluirse en el modelo con valor triple.

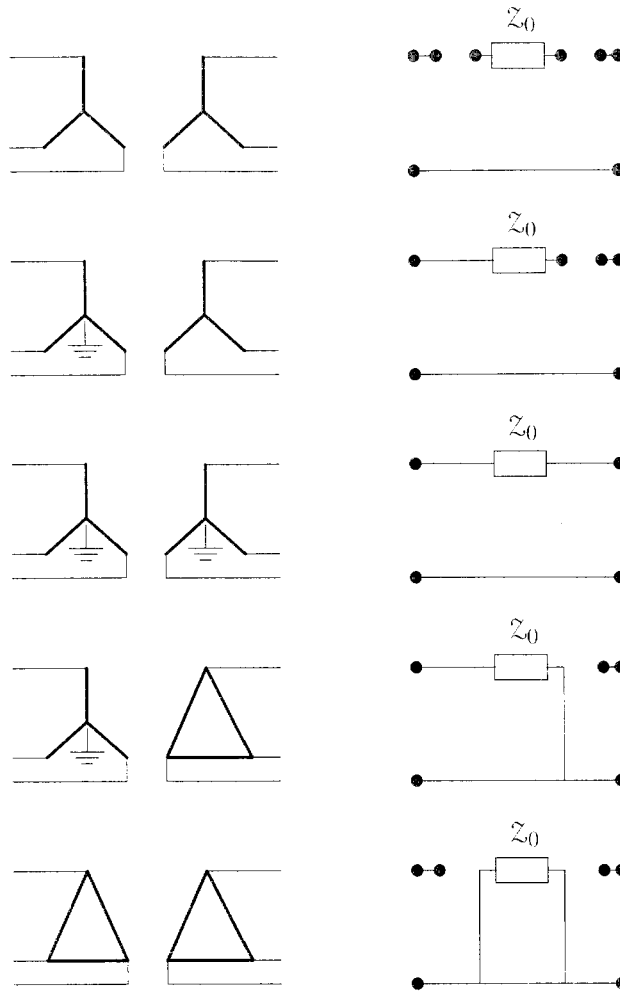


Figura 13.1 Modelo de homopolar de algunos transformadores.

CARGAS

Como normalmente se considerará el sistema en vacío antes del fallo, no habrá que considerarlas. Pese a ello, si deseásemos modelar una carga como impedancia, consideraremos como iguales directa e inversa, $Z_1 = Z_2 = Z_c$. Para la homopolar habrá que tener en cuenta el tipo de conexión de su neutro.

En un sistema de gran dimensión, será necesario disponer de los modelos en las 3 secuencias de los distintos elementos del sistema, conformando de este modo 3 redes de secuencias. A partir de ellas llevaremos a cabo un procedimiento en 4 pasos:

1. A fin de desacoplar cálculos en la medida de lo posible, se deberá encontrar el equivalente Thevenin que cada red de secuencia presente en el punto del fallo, debiendo por tanto satisfacerse la ecuación:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_T^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & Z_T^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & Z_T^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_{f0} \\ J_{f1} \\ J_{f2} \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

donde las tensiones son de fase a tierra y las intensidades circulan desde las redes hacia la falta.

2. Una segunda relación vectorial debe obtenerse de analizar la propia falta. Si disponemos de una matriz de admitancias Y_f o una matriz de impedancias Z_f para describirla, $u = Z_f J_f$, bastará pasar

las tensiones e intensidades hacia la falta del dominio de las fases al dominio de las componentes simétricas:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = T^{-1} Z_f T \begin{bmatrix} J_{f0} \\ J_{f1} \\ J_{f2} \end{bmatrix} \quad (13.2)$$

Las Expresiones (13.1) y (13.2) constituyen 6 ecuaciones con 6 incógnitas que permiten resolver las magnitudes en el punto de la falta.

3. La obtención de cualquier otra magnitud del circuito podrá realizarse desacoplando el efecto de la falta sobre las 3 redes de secuencias, bastando con sustituir en cada secuencia el efecto de la falta por una fuente de intensidad o una fuente de tensión de valores los obtenidos en el paso 2. Hay que tener en cuenta que la sustitución por fuente de intensidad es más conveniente para plantear las ecuaciones nodales de la red de secuencia.

Una vez desacopladas las 3 redes, en lugar de resolver cada circuito en la forma que se ha planteado, podemos aplicar el teorema de compensación (a estos efectos es una aplicación del teorema de sustitución), para calcular los incrementos en un circuito en que la única fuente sea la que modela la falta.

En esta etapa deberá prestarse atención a los desfases introducidos por los transformadores, distintos según la secuencia.

4. Por último, cuando sea necesario, la terna de magnitudes en el dominio de las componentes simétricas deberá trasladarse al dominio de fases.



Existe además una alternativa a la resolución algebraica planteada en el paso 2, que es la de interpretar la Ecuación (13.2) como una interconexión entre las redes de secuencia, las cuales, ya encontramos reducidas a sus equivalentes Thevenin desde el punto de la falta en la Ecuación (13.1).

En las Figuras 13.2, 13.3 y 13.4 se muestran dichos esquemas de interconexión para distintos tipos de falta.

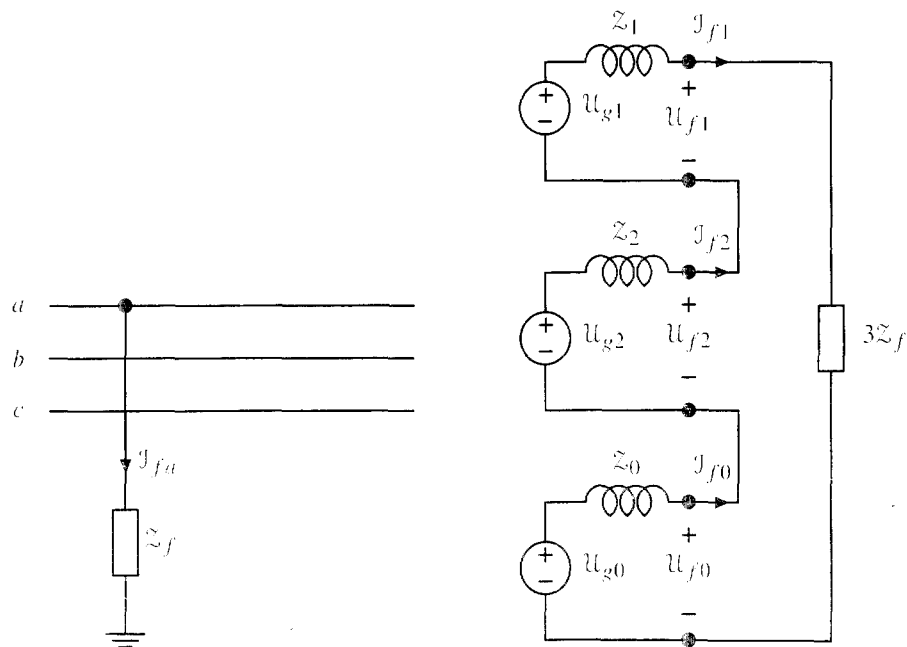


Figura 13.2 Falta fase-tierra en el dominio de fases e interconexión a que da lugar en componentes simétricas.

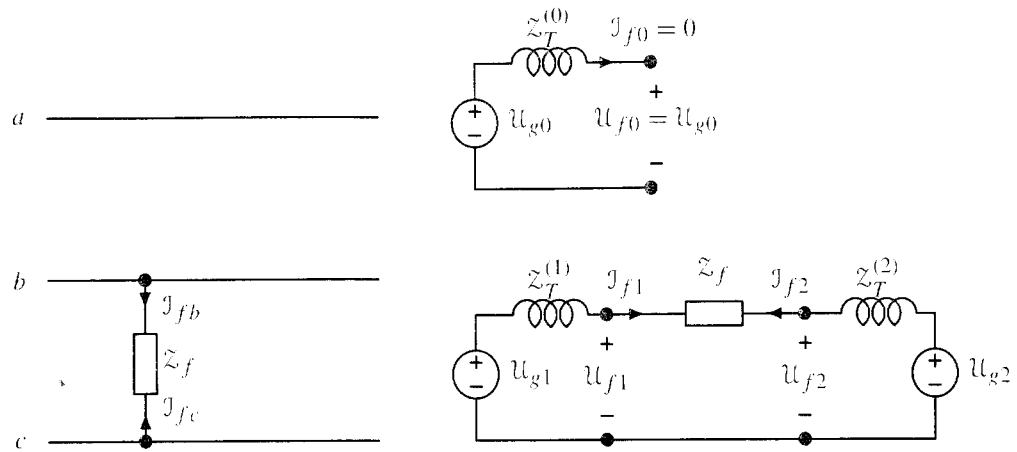


Figura 13.3 Falta fase-fase en el dominio de fases e interconexión a que da lugar en componentes simétricas.

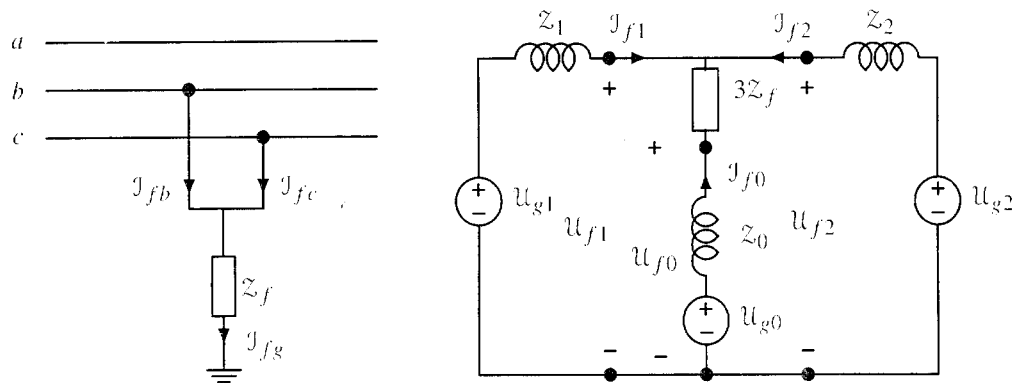


Figura 13.4 Falta fase-fase-tierra en el dominio de fases e interconexión a que da lugar en componentes simétricas.

PROBLEMAS RESUELTOS

13.1. Conocidos los equivalentes Thevenin a las tres secuencias de una red en un determinado nudo, encontrar las ecuaciones de fallo en el dominio de secuencias y su equivalencia como interconexión de circuitos, en las siguientes situaciones:

1. Fallo fase-tierra con impedancia de fallo Z_f .
2. Fallo fase-fase con impedancia de fallo Z_f .
3. Fallo fase-fase-tierra con impedancia a tierra Z_f .

Resolución

Fallo fase-tierra con impedancia de fallo Z_f : para que este fallo resulte fácil de analizar consideraremos que la fase con fallo es la 'a'. De este modo las ecuaciones del fallo serán:

$$U_a = Z_f I_a \quad I_b = 0 \quad I_c = 0$$

Sustituyendo las magnitudes de fase por sus expresiones en función de magnitudes del dominio de secuencias:

$$\begin{aligned} U_0 + U_1 + U_2 &= Z_f (I_0 + I_1 + I_2) \\ I_0 + a^2 I_1 + a I_2 &= 0 \\ I_0 + a I_1 + a^2 I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Restando la tercera ecuación a la segunda:

$$(a^2 - a)J_1 + (a - a^2)J_2 = 0$$

Luego $J_1 = J_2$. Usando este resultado en la segunda ecuación:

$$J_0 + (a^2 + a)J_1 = 0$$

Y teniendo en cuenta que $a^2 + a = -1$, tenemos $J_0 = J_1$.

Sustituyendo en la primera ecuación, $U_0 + U_1 + U_2 = 3Z_f J_0$, que junto a $J_0 = J_1 = J_2$ constituyen las tres ecuaciones del fallo en el dominio de secuencias.

Dichas ecuaciones pueden interpretarse como la interconexión de los 3 circuitos en serie con una impedancia $3Z_f$, como se mostró en la Figura 13.2.

Fallo fase-fase con impedancia de fallo Z_f : para facilitar el estudio, consideraremos que el fallo afecta a las fases 'b' y 'c'; así las ecuaciones del fallo serán

$$J_a = 0 \quad J_b + J_c = 0 \quad U_b - U_c = Z_f J_b$$

que expresadas en términos de secuencias queda como:

$$\begin{aligned} J_0 + J_1 + J_2 &= 0 \\ (J_0 + a^2 J_1 + a J_2) + (J_0 + a J_1 + a^2 J_2) &= 0 \\ (U_0 + a^2 U_1 + a U_2) - (U_0 + a U_1 + a^2 U_2) &= Z_f (J_0 + a^2 J_1 + a J_2) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $a^2 + a = -1$ y despejando en la segunda ecuación tenemos $J_1 + J_2 = 2J_0$, y sustituyendo en la primera ecuación: $3J_0 = 0$, luego:

$$J_0 = 0 \tag{13.3}$$

$$J_1 = -J_2 \tag{13.4}$$

Simplificando la tercera ecuación:

$$(a^2 - a)(U_1 - U_2) = (a^2 - a)Z_f J_1$$

y finalmente $U_1 - U_2 = Z_f J_1$, que junto a (13.3) y (13.4) constituyen las tres ecuaciones en el dominio de secuencias que buscábamos. Dichas ecuaciones tienen una interconexión asociada como la mostrada en la Figura 13.3: homopolar aislada y directa en paralelo con inversa a través de una impedancia Z_f .

Fallo fase-fase-tierra con impedancia a tierra Z_f : como en todos los fallos que afectan a 2 fases, consideraremos que éstas son la 'b' y la 'c'. De este modo las ecuaciones del fallo son:

$$J_a = 0 \quad U_b = U_c \quad U_c = Z_f (J_b + J_c)$$

y en términos de secuencias

$$\begin{aligned} J_0 + J_1 + J_2 &= 0 \tag{13.5} \\ U_0 + a^2 U_1 + a U_2 &= U_0 + a U_1 + a^2 U_c \\ U_0 + a U_1 + a^2 U_2 &= Z_f (J_0 + a^2 J_1 + a J_2 + J_0 + a J_1 + a^2 J_2) \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos $(a^2 - a)(U_1 - U_2) = 0$ y por tanto:

$$U_1 = U_2 \tag{13.6}$$

De la tercera:

$$U_0 + (a + a^2)U_1 = Z_f (2J_0 + (a^2 + a)(J_1 + J_2))$$

y teniendo en cuenta que $a + a^2 = -1$ y que de la primera ecuación obtenemos $J_0 = -J_1 - J_2$, nos queda $U_0 - U_1 = 3Z_f J_0$, que junto a (13.5) y (13.6) constituyen las 3 ecuaciones que buscábamos. En la Figura 13.4 se mostró la interpretación como interconexión de circuitos que tienen dichas ecuaciones: directa en paralelo con inversa y con la configuración en serie de $3Z_f$ y homopolar.

- 13.2.** Un generador síncrono con reactancias a las tres secuencias de valores X_0 , X_1 y X_2 , cumple que $X_1 = X_2 \gg X_0$. Si su neutro está puesto a tierra a través de una reactancia limitadora X_n , determinar la condición que debe cumplir dicha reactancia para que la intensidad de un fallo fase-tierra rígido sea mayor que la que aparece en un fallo trifásico rígido.

Resolución

La intensidad de cortocircuito en el caso de fallo trifásico rígido se obtiene fácilmente como $J_{cc}^{3f} = E/X_1$, siendo E la fuerza electromotriz de secuencia directa del generador.

El caso de fallo fase-tierra rígido puede estudiarse con la interconexión de circuitos de secuencias de la Figura 13.5.

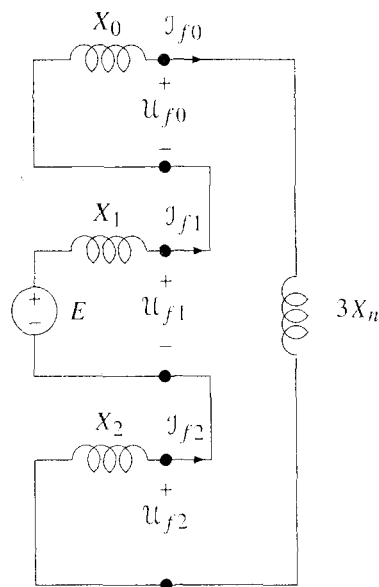


Figura 13.5 Interconexión para el fallo fase-tierra del generador.

Se ve en esta situación que:

$$J_0 = J_1 = J_2 = \frac{E}{X_1 + X_2 + X_0 + 3X_n} = \frac{E}{2X_1 + X_0 + 3X_n}$$

y por tanto

$$J_{cc}^{1f} = J_0 + J_1 + J_2 = 3J_1 = \frac{3E}{2X_1 + X_0 + 3X_n}$$

La condición $J_{cc}^{1f} > J_{cc}^{3f}$ equivale a:

$$\frac{3E}{2X_1 + X_0 + 3X_n} > \frac{E}{X_1}$$

ó $3X_1 > 2X_1 + X_0 + 3X_n$, que se reduce a:

$$X_n < \frac{1}{3}(X_1 - X_0)$$

Como caso concreto, tenemos que en el caso de que el neutro del generador esté rígidamente unido a tierra, $X_n = 0$, la intensidad de cortocircuito en el fallo fase-tierra es mayor que en el caso trifásico.

- 13.3.** Para la red de la Figura 13.6, con los datos expresados en p.u. bajo una misma base, determinar:
1. Intensidad por el neutro del transformador y las tensiones en bornas del generador, para un fallo fase-tierra en la línea, a 5 km de la barra 2 y con impedancia de fallo $Z_f = 0.02j$.
 2. Corrientes de cortocircuito y la componente homopolar de las tensiones en el punto de fallo, para un fallo fase-fase en la línea, en el mismo punto y con la misma impedancia de fallo que en el caso anterior.

Datos:

- Generador: $\begin{cases} X_0 = 0.04 \\ X_1 = 0.1 \\ X_2 = 0.08 \end{cases}$
- Transformador: $\begin{cases} X_{cc} = 0.15 \\ X_0 = 0.12 \end{cases}$
- Línea: $L = 20 \text{ km}$, $\begin{cases} X_0 = 0.2 \\ X_1 = X_2 = 0.08 \end{cases}$

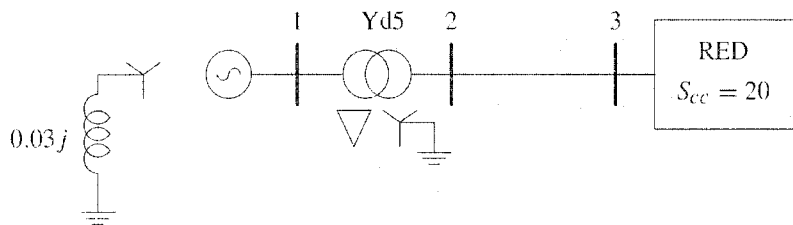


Figura 13.6 Sistema.

Resolución

Los circuitos a las 3 secuencias, junto a los equivalentes desde el fallo, se muestran en las Figuras 13.7 (homopolar), 13.8 (directa) y 13.9 (inversa). Nótese que en este punto no se han incluido los desfases introducidos por el transformador, los cuales se tendrán en cuenta sólo al referirnos a magnitudes del generador.

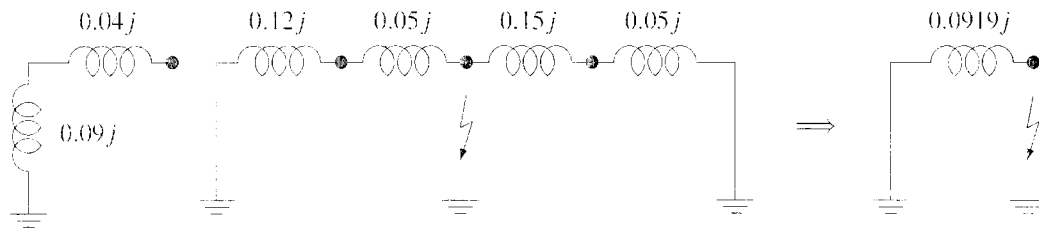


Figura 13.7 Circuito de secuencia homopolar.

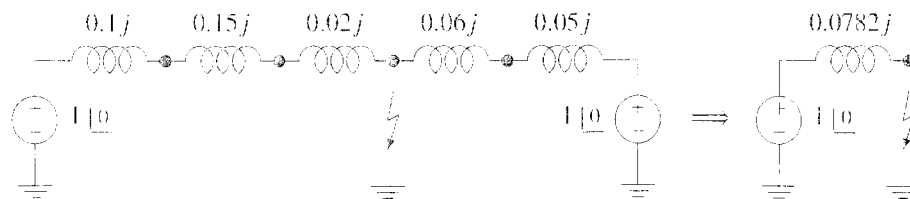


Figura 13.8 Circuito de secuencia directa.

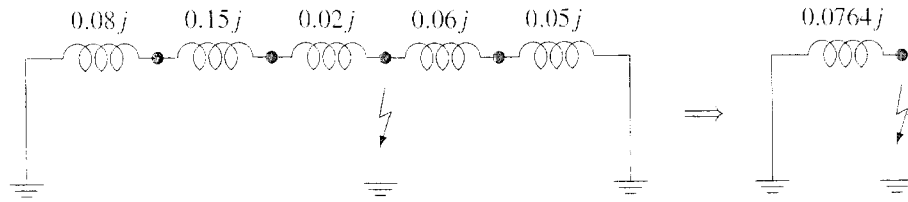


Figura 13.9 Circuito de secuencia inversa.

Fallo fase-tierra: las tres secuencias deben acoplarse como se muestra en la Figura 13.10:

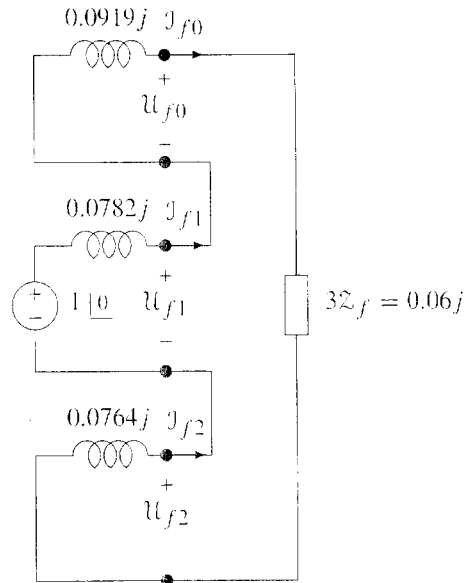


Figura 13.10 Circuito con acoplamiento de secuencias.

que tiene las ecuaciones

$$\begin{aligned} J_{f0} &= J_{f1} = J_{f2} = -3.2626j \\ U_{f0} &= 0.2998 \underline{0} \\ U_{f1} &= 0.7448 \underline{0} \\ U_{f2} &= -0.2492 \underline{0} \end{aligned}$$

Para obtener la intensidad en el neutro del transformador, usamos el circuito de homopolar, en el que se ha sustituido la condición de fallo U_{f0} , como se muestra en la Figura 13.11. Es inmediato obtener:

$$\begin{aligned} J_{I0} &= 1.7635j \\ |J_N| &= 3|J_{I0}| = 5.29 \end{aligned}$$

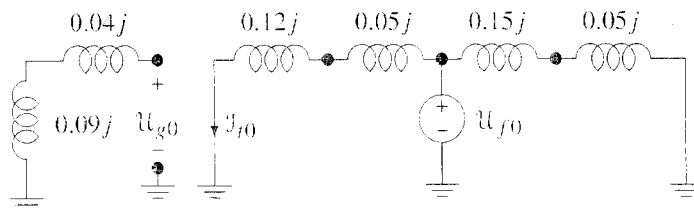


Figura 13.11 Circuito de secuencia homopolar con sustitución del fallo.

Para obtener las tensiones en bornas del generador, buscamos dichas tensiones en el dominio de componentes simétricas:

- Homopolar: de la Figura 13.11 resulta obvio que $u_{g0} = 0$.
- Directa: de la Figura 13.12, obtenemos

$$J_{g1} = \frac{1 \angle 0 - u_{f1}}{0.27j} = -0.945j$$

$$u_{g1} = 1 \angle 0 - 0.1jJ_{g1} = 0.9055$$

Designando por u'_{g1} la tensión que realmente hay en el generador, incluyendo desfase introducido por el transformador:

$$u'_{g1} = u_{g1} \cdot 1 \angle -150 = 0.9055 \angle -150$$

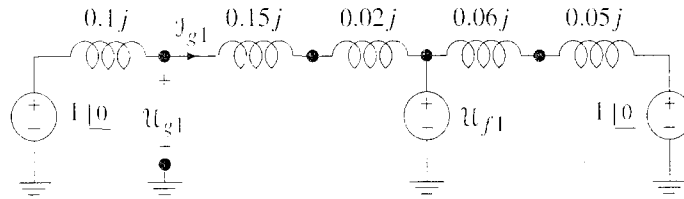


Figura 13.12 Circuito de secuencia directa con sustitución del fallo.

- Inversa: de la Figura 13.13, obtenemos

$$J_{g2} = -u_{f2}/0.25j = -0.9968j$$

$$u_{g2} = -0.08jJ_{g2} = -0.0797$$

Y la tensión incluyendo desfase introducido por el transformador:

$$u'_{g2} = u_{g2} \cdot 1 \angle 150 = 0.0797 \angle 150$$

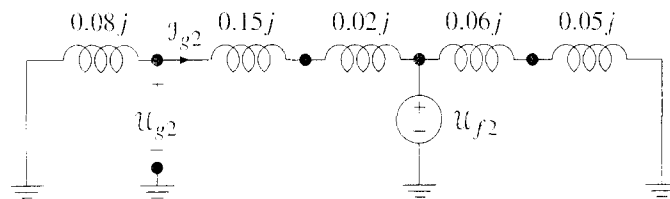


Figura 13.13 Circuito de secuencia inversa con sustitución del fallo.

Transformando dichas tensiones al dominio de fases:

$$\begin{bmatrix} u'_{ga} \\ u'_{gb} \\ u'_{gc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{g0} \\ u'_{g1} \\ u'_{g2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9479 \angle -154.18 \\ 0.8257 \angle 90 \\ 0.9479 \angle -25.82 \end{bmatrix}$$

Fallo fase-fase: para este tipo de fallo, la interconexión de los circuitos de secuencias se muestra en la Figura 13.14, estando la homopolar sin conexión.

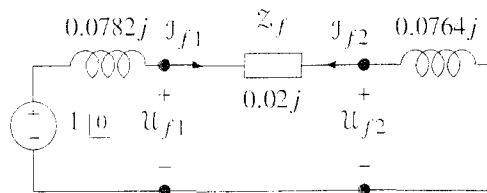


Figura 13.14 Interconexión de los circuitos de secuencia para el fallo fase-fase.

Las ecuaciones en dicha situación son

$$\begin{aligned}U_{f0} &= I_{f0} = 0 \\I_{f1} &= -I_{f2} = -5.7274j \\U_{f1} &= 0.5521 \underline{0} \\U_{f2} &= 0.4375 \underline{0}\end{aligned}$$

y transformando al dominio de fases:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.92 \underline{0} \\ 9.92 \underline{0} \end{bmatrix}$$

También podemos obtener las tensiones en el punto del fallo

$$\begin{aligned}U_{f0} &= 0 \\U_{f1} &= 1 - 0.0782jI_{f1} = 0.5521 \\U_{f2} &= -0.0764jI_{f2} = 0.4376\end{aligned}$$

y transformando al dominio de fases:

$$\begin{bmatrix} U_{fa} \\ U_{fb} \\ U_{fc} \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} U_{f0} \\ U_{f1} \\ U_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9897 \\ 0.5047 \underline{-168.66} \\ 0.5047 \underline{168.66} \end{bmatrix}$$

- 13.4.** Se conocen las matrices de impedancias en p.u. de las redes a secuencia directa, inversa y homopolar correspondientes a una red de 4 nudos. El nudo 3 se conecta a un transformador Yy0 con $X_{cc} = 0.1$ seguido de un generador con $X_1 = X_2 = 0.1j$. Estando en vacío, se produce un fallo fase-fase-tierra en el nudo 4. Hallar las intensidades del fallo.

$$\begin{aligned}Z_{n1} = Z_{n2} &= \begin{bmatrix} 0.8026 & 0.1025 & 0.4026 & 0.1067 \\ 0.1025 & 0.4013 & 0.1025 & 0.1234 \\ 0.4026 & 0.1025 & 0.8226 & 0.1230 \\ 0.1067 & 0.1234 & 0.1230 & 0.6500 \end{bmatrix} j \\ Z_{n0} &= \begin{bmatrix} 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.7374 & 0.15 & 0.15 \\ 0.06 & 0.15 & 0.69 & 0.12 \\ 0.06 & 0.15 & 0.12 & 0.77 \end{bmatrix} j\end{aligned}$$

Resolución

En este problema, es necesario obtener la impedancia equivalente de la red modificada en el nudo 4, a las tres secuencias. Para ello, dada una matriz de impedancias de nudos Z_{ni} a la secuencia i , nos planteamos cuál es la nueva impedancia equivalente $Z_{eq4} = U_4/I_4$ cuando en el nudo 3 se añade una impedancia Z_i (impedancia de transformador más impedancia de generador), como se muestra en la Figura 13.15.

La matriz de impedancias de nudos nos proporciona la relación:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (13.7)$$

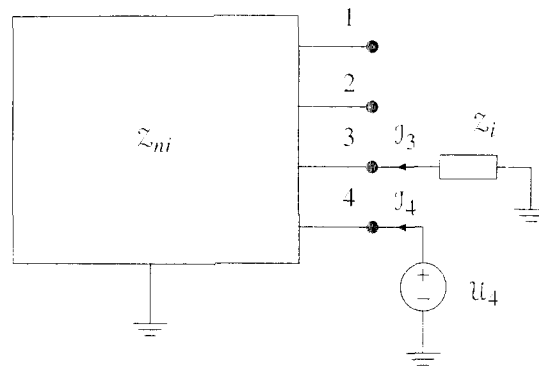


Figura 13.15 Esquema para el cálculo de la nueva impedancia equivalente.

Las condiciones de la red corresponden a imponer

$$\begin{aligned} J_1 = J_2 &= 0 \\ U_3 &= -Z_i J_3 \end{aligned}$$

que junto a la Ecuación (13.7) da:

$$\begin{aligned} U_3 &= Z_{33}J_3 + Z_{34}J_4 = -Z_i J_3 \\ U_4 &= Z_{43}J_3 + Z_{44}J_4 \end{aligned}$$

Despejando J_3 de la primera de estas ecuaciones:

$$J_3 = \frac{-Z_{34}}{Z_i + Z_{33}} J_4$$

y sustituyendo en la segunda

$$U_4 = Z_{43} \frac{-Z_{34}}{Z_i + Z_{33}} J_4 + Z_{44} J_4$$

por lo que la nueva impedancia equivalente en el nudo 4, a la secuencia i , es

$$Z_{eqi} = U_4/J_4 = Z_{44} - \frac{Z_{43}Z_{34}}{Z_i + Z_{33}}$$

Particularizaremos ahora para las distintas secuencias. Así, para la secuencia homopolar, tenemos $Z_0 = \infty$, pues el transformador es Yy sin neutros a tierra. Por este motivo el valor que pudiese tener la impedancia homopolar del generador no es relevante. Tenemos, por tanto, que Z_{eq0} será el elemento Z_{44} de la matriz de impedancias de nudos a la secuencia homopolar:

$$Z_{eq0} = Z_{44} = 0.77j$$

Para las secuencias directa e inversa tendremos $Z_1 = Z_2 = 0.1j + 0.1j = 0.2j$ con lo que:

$$Z_{eq1} = Z_{eq2} = 0.65j - \frac{(0.123j)^2}{0.2j + 0.8226j} = 0.6648j$$

Conocidos los equivalentes Thevenin a las tres secuencias, el fallo fase-fase-tierra se estudia mediante la conexión de circuitos de la Figura 13.16.

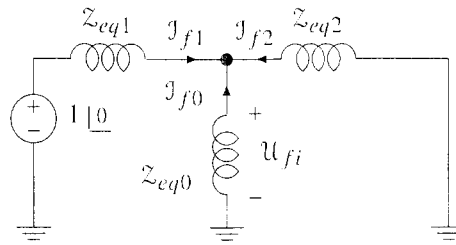


Figura 13.16 Conexión correspondiente al fallo fase-fase-tierra.

Escribiendo la ecuación nodal de dicho circuito:

$$\left(\frac{1}{Z_{eq1}} + \frac{1}{Z_{eq2}} + \frac{1}{Z_{eq0}} \right) U_{fi} = \frac{1 \angle 0}{Z_{eq1}}$$

luego $U_0 = U_1 = U_2 = 0.354 \angle 0$ y las intensidades del fallo

$$\begin{aligned} J_{f0} &= -U_{f0}/Z_{eq0} = 0.4597j \\ J_{f1} &= (1 \angle 0 - U_{f1})/Z_{eq1} = -1.017j \\ J_{f2} &= -U_{f2}/Z_{eq2} = 0.5573j \end{aligned}$$

Las intensidades por las fases hacia el fallo serán:

$$\begin{bmatrix} J_{fa} \\ J_{fb} \\ J_{fc} \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} J_{f0} \\ J_{f1} \\ J_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5279 \angle 153.17 \\ 1.5279 \angle 26.83 \end{bmatrix}$$

y la intensidad hacia tierra será $3J_{f0}$, o lo que es lo mismo

$$J_{fb} + J_{fc} = 1.379j$$

13.5. Para la red de la Figura 13.17, y con los datos indicados, expresados en p.u. para una misma base, determinar:

1. Potencia de cortocircuito en el nudo 3.
2. Intensidades por las fases de la línea L1 tras un corto fase-fase en el nudo 2.
3. Módulo de la intensidad por el neutro del transformador Yd5 durante dicho fallo.

Datos:

- Generador: $\begin{cases} X_0 = 0.05 \\ X_1 = X_2 = 0.1 \end{cases}$
- Transformador Yd5: $\begin{cases} X_0 = 0.1 \\ X_1 = X_2 = 0.12 \end{cases}$
- Transformador Yy0: $X_{cc} = 0.15$
- Línea L1: $\begin{cases} X_0 = 0.16 \\ X_1 = X_2 = 0.04 \end{cases}$
- Línea L2: $\begin{cases} X_0 = 0.32 \\ X_1 = X_2 = 0.08 \end{cases}$

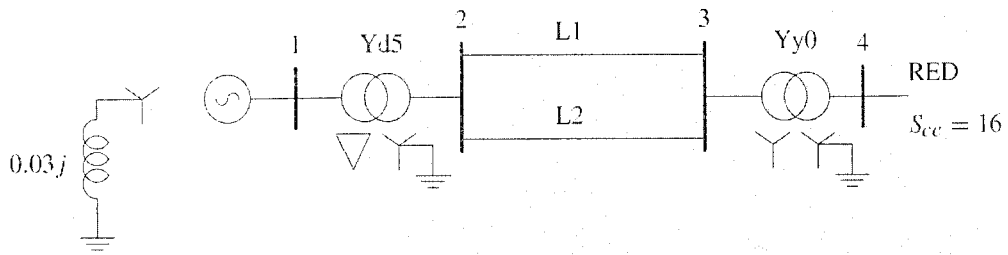


Figura 13.17 Sistema.

Resolución

Los circuitos a cada una de las secuencias se muestran en las Figuras 13.18 (homopolar, donde el modelo de la red no es relevante debido a que el transformador Yy0 no deja pasar esta componente), 13.19 (directa) y 13.20 (inversa).

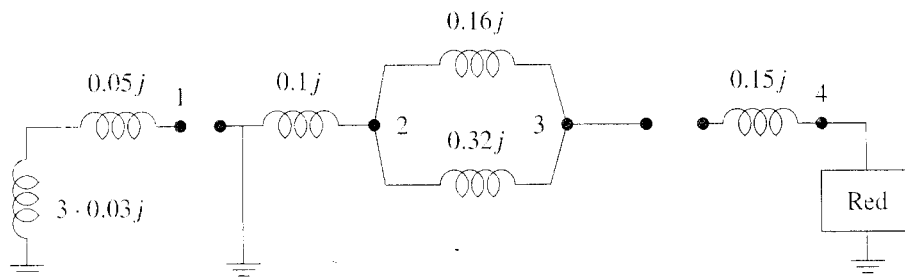


Figura 13.18 Sistema en secuencia homopolar.

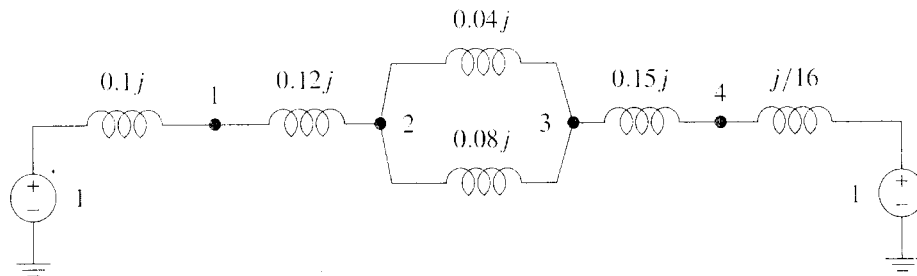


Figura 13.19 Sistema en secuencia directa.

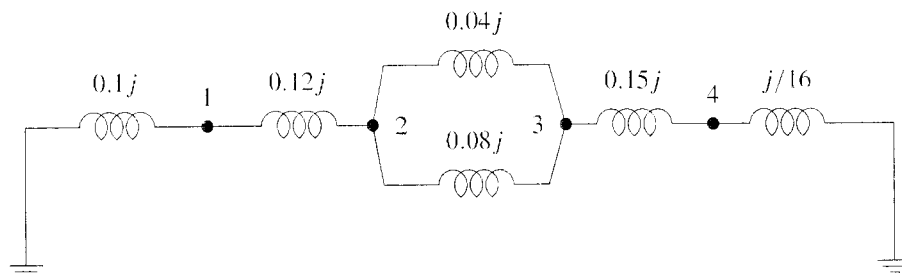


Figura 13.20 Sistema en secuencia inversa.

Primera cuestión. Para obtener la potencia de cortocircuito en el nudo 3, es necesario conocer la impedancia Thevenin en dicho nudo, que resulta ser $X_T = 0.1141$, por lo que:

$$S_{cc} \approx \frac{1}{X_T} = 8.861$$

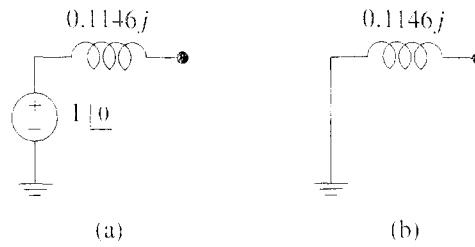


Figura 13.21 Equivalentes Thevenin de los circuitos de secuencias: (a)directa, (b) inversa.

Segunda cuestión. Para el estudio de un corto fase-fase, sólo hay que tener en cuenta las secuencias directa e inversa, pues ya se sabe que $\mathcal{J}_0 = 0$. Los equivalentes Thevenin de dichas secuencias en el nudo 2 se muestran en la Figura 13.21.

Imponiendo las condiciones de fallo fase-fase, obtenemos que el circuito a resolver es el de la Figura 13.22, que conduce a:

$$\mathcal{J}_1 = -\mathcal{J}_2 = -4.363j$$

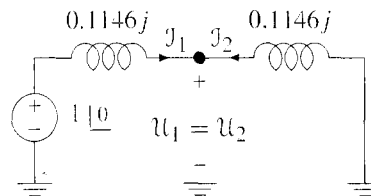


Figura 13.22 Montaje de secuencias para el fallo fase-fase.

Acudiendo otra vez a los circuitos de secuencias directa e inversa y sustituyendo el fallo por fuentes, obtenemos las componentes de secuencia de la intensidad de la línea L1. En este caso, optaremos por sustituir por fuentes de intensidad, como se muestra en las Figuras 13.23 y 13.24, donde tras proceder mediante operaciones de divisor de intensidad llegamos a $I_{L1}^+ = 1.394j$ del primer circuito y a $I_{L1}^- = -1.394j$.

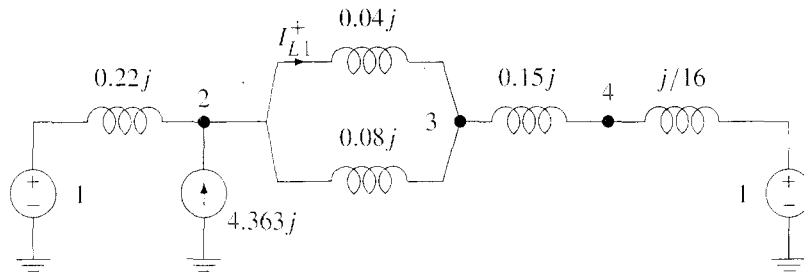


Figura 13.23 Circuito de secuencia directa con fallo sustituido.

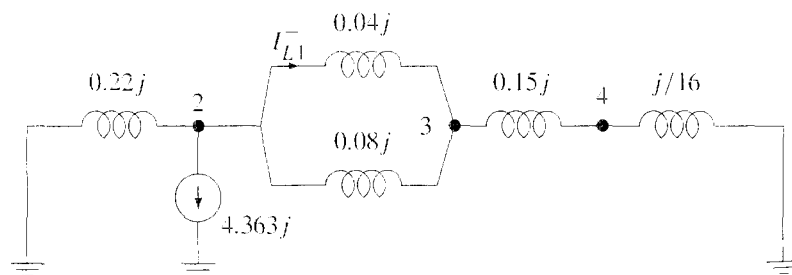


Figura 13.24 Circuito de secuencia inversa con fallo sustituido.

Transformando a intensidades de fase:

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.394j \\ -1.394j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.414 \angle 0 \\ -2.414 \angle 0 \end{bmatrix}$$

Tercera cuestión. Puesto que $J_0 = 0$, no existen intensidades por los neutros de los transformadores.

13.6. Ante un fallo fase-fase-tierra en la barra 6 del circuito de la Figura 13.25, calcular la tensión en la barra 5 y la corriente por el neutro de T1.

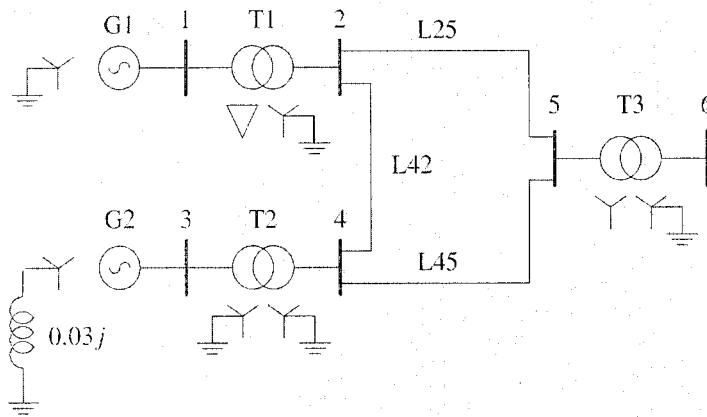


Figura 13.25 Sistema.

Datos:

- Generadores G1, G2: $\begin{cases} X_0 = 0.09 \\ X_1 = X_2 = 0.35 \end{cases}$
- Transformadores T1, T2: $X_0 = X_1 = X_2 = 0.1$
- Transformador T3: $X_0 = X_1 = X_2 = 0.05$
- Línea L42: $\begin{cases} X_0 = 1.8 \\ X_1 = X_2 = 0.45 \end{cases}$
- Líneas L25, L45: $\begin{cases} X_0 = 1.15 \\ X_1 = X_2 = 0.35 \end{cases}$

Resolución

Los equivalentes monofásicos para las tres secuencias se muestran en las Figuras 13.26, 13.27 y 13.28.

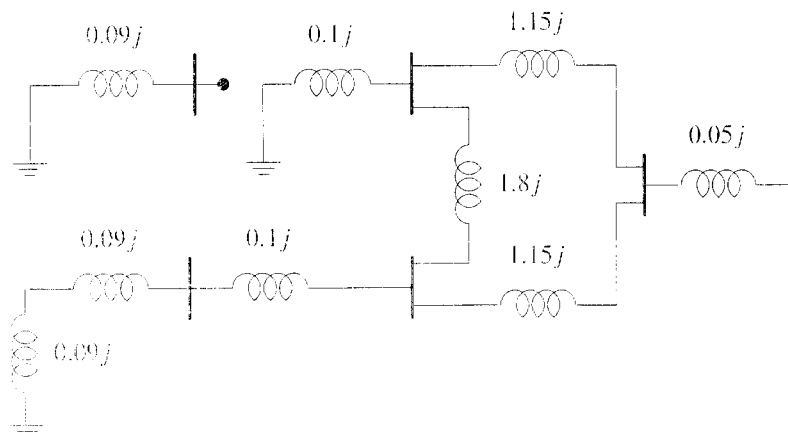


Figura 13.26 Secuencia homopolar.

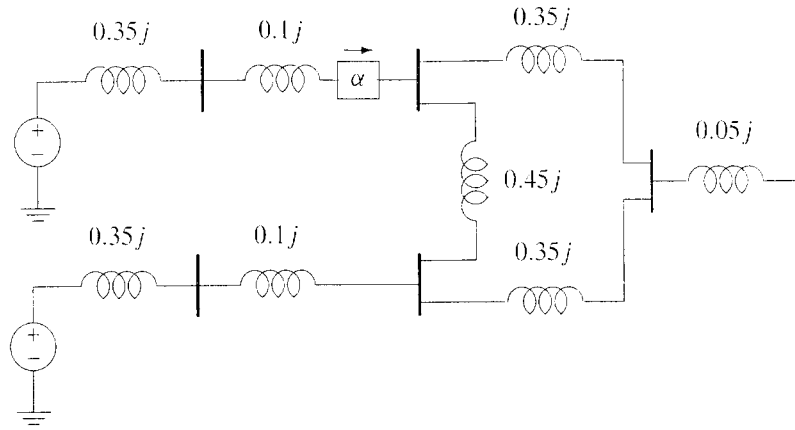


Figura 13.27 Secuencia directa.

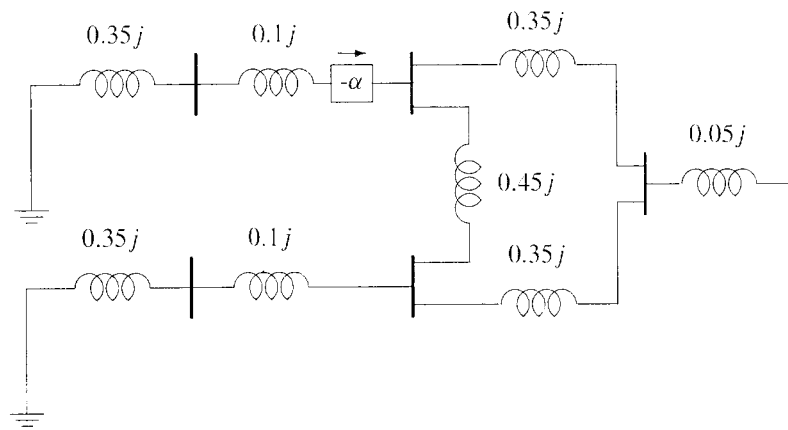


Figura 13.28 Secuencia inversa.

Nótese que el circuito de secuencia inversa es como el de directa pero sin fuentes y con el desfase introducido por el transformador T1, de signo contrario.

Para el cálculo de los equivalentes Thevenin, es conveniente una conversión $\Delta - Y$, quedando, para las secuencias directa e inversa el circuito de la Figura 13.30, y para el de homopolar el de la Figura 13.29.

Los equivalentes se muestran en la Figura 13.31, y la interconexión exigida por un fallo fase-fase-tierra en el circuito de la Figura 13.32. Planteando una ecuación nodal en dicho circuito, tenemos:

$$\frac{1 \angle 0}{0.45j} = u_1 \cdot \left(\frac{1}{0.714j} + \frac{2}{0.45j} \right)$$

De donde $u_0 = u_1 = u_2 = 0.3802 \angle 0$ y las intensidades hacia el fallo:

$$J_0 = \frac{-0.3802}{0.714j} = 0.5323 \angle 90$$

$$J_1 = \frac{1 - 0.3802}{0.45j} = 1.3773 \angle -90$$

$$J_2 = \frac{-0.3802}{0.45j} = 0.845 \angle 90$$

Las tensiones en el nudo 5 se obtienen a partir de las tensiones en el punto del fallo, teniendo en cuenta las caídas en el transformador T3, que en este caso no provoca desfases:

$$u_0^5 = u_0 + 0.05jJ_0 = 0.3536$$

$$u_1^5 = u_1 + 0.05jJ_1 = 0.45$$

$$u_2^5 = u_2 + 0.05jJ_2 = 0.338$$

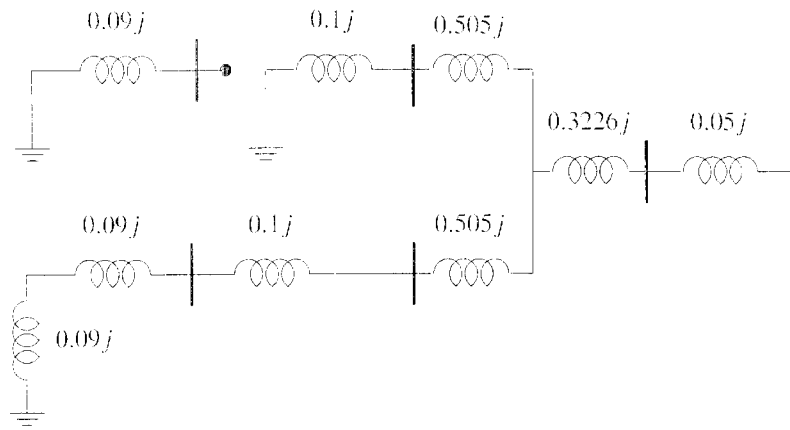


Figura 13.29 Secuencia homopolar tras modificación.

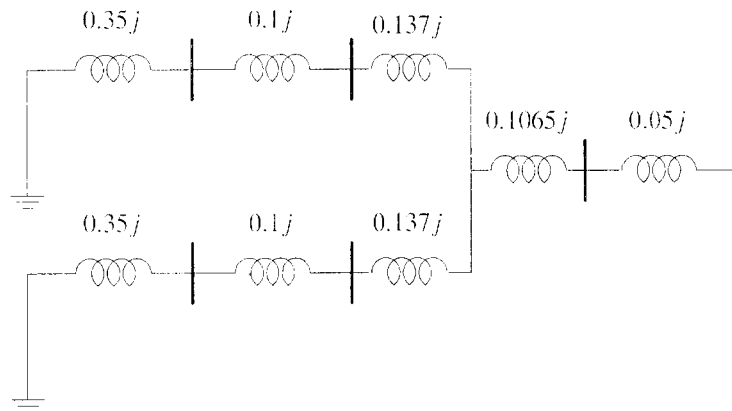


Figura 13.30 Secuencias directa e inversa tras modificación.

Pasando a tensiones de fase:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_a^s \\ \mathcal{U}_b^s \\ \mathcal{U}_c^s \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0^s \\ \mathcal{U}_1^s \\ \mathcal{U}_2^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1416 \\ 0.105 \angle -112.61 \\ 0.105 \angle 112.61 \end{bmatrix}$$

En cuanto a la corriente por el neutro de T1, ésta puede obtenerse a partir del circuito 13.33, en el que se ha sustituido su aportación al fallo por una fuente de intensidad. Aplicando un divisor de intensidad:

$$J = J_0 \frac{0.28 + 0.505}{0.1 + 0.505 + 0.505 + 0.28} = 0.3j$$

Luego, por el neutro de T3 circulará $J_N = 3J = 0.9j$.

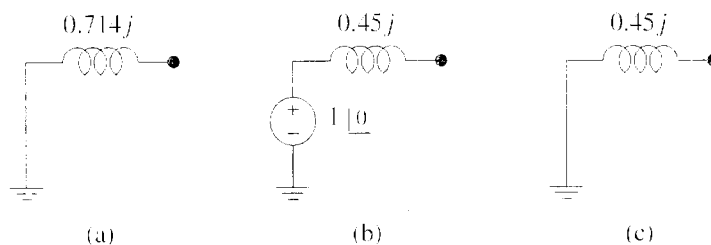


Figura 13.31 Equivalentes de las tres secuencias: (a) homopolar, (b) directa, (c) inversa.

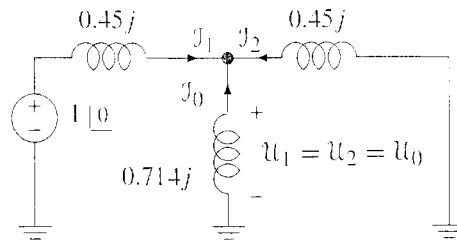


Figura 13.32 Conexión para fallo fase-fase-tierra.

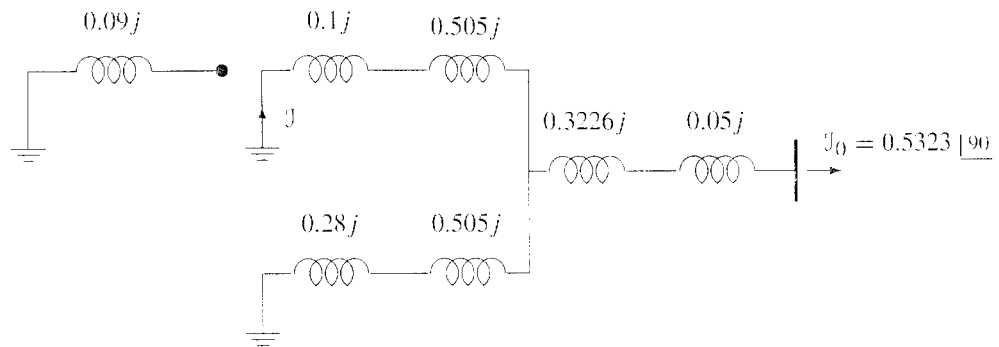


Figura 13.33 Circuito de secuencia homopolar para el cálculo de la intensidad de neutro.

13.7. En la barra 3 del sistema de la Figura 13.34, se produce un contacto a tierra de la fase 'a' simultáneamente con un fallo entre las fases 'b' y 'c'. Calcular las corrientes en el punto del fallo y las tensiones en la barra 1. Datos:

- Generador: $\begin{cases} X_0 = 0.05 \\ X_1 = X_2 = 0.15 \\ X_g = 0.02 \end{cases}$
- Transformador: $\begin{cases} X_0 = 0.14 \\ X_1 = X_2 = 0.16 \end{cases}$
- Línea L23: $\begin{cases} X_0 = 3 \\ X_1 = X_2 = 0.9 \end{cases}$

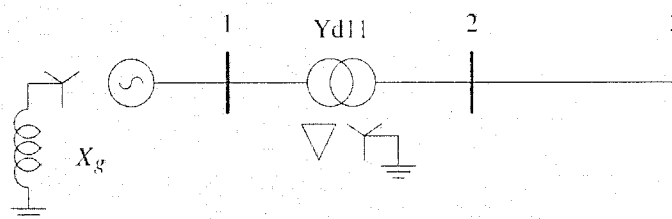


Figura 13.34 Sistema.

Resolución

Las Figuras 13.35, 13.36 y 13.37 muestran los circuitos que la red presenta a las tres secuencias, así como sus equivalentes Thevenin. El ángulo de la fuente de tensión en el circuito de directa se ha tomado como 30° a fin de que la tensión de vacío en el nudo 3, y por lo tanto el equivalente Thevenin desde dicha barra, sea origen de fases.

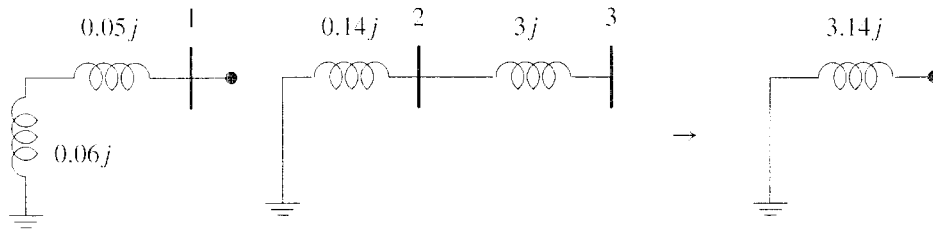


Figura 13.35 Circuito de homopolar.

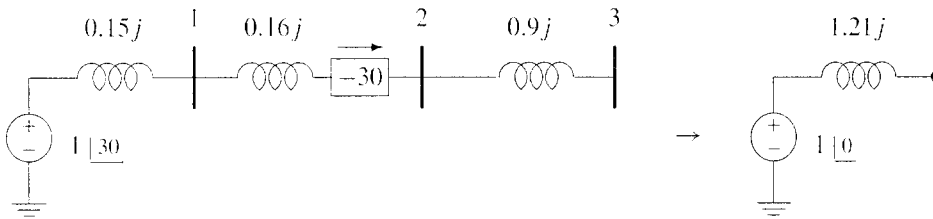


Figura 13.36 Circuito de directa.

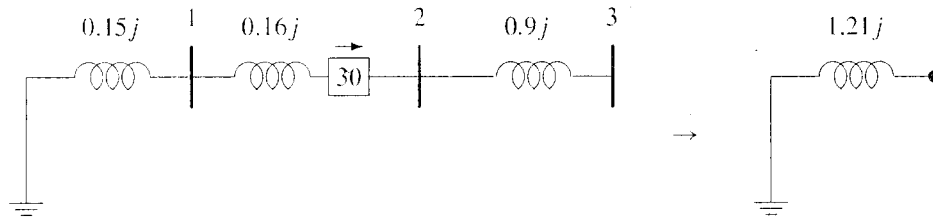


Figura 13.37 Circuito de inversa.

El fallo que se plantea en este problema tiene ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_a &= 0 \\ u_b &= u_c \\ J_b + J_c &= 0 \end{aligned}$$

Expresadas en secuencias:

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 &= 0 \\ u_0 + a^2 u_1 + a u_2 &= u_0 + a u_1 + a^2 u_2 \\ J_0 + a^2 J_1 + a J_2 + J_0 + a J_1 + a^2 J_2 &= 0 \end{aligned}$$

La segunda ecuación equivale a $u_1 = u_2$, y teniendo en cuenta $a^2 + a = -1$, la tercera ecuación se reduce a $J_1 + J_2 = 2J_0$. De la primera obtenemos $u_1 = -u_0/2$. Estas ecuaciones se satisfacen en el circuito de la Figura 13.38.

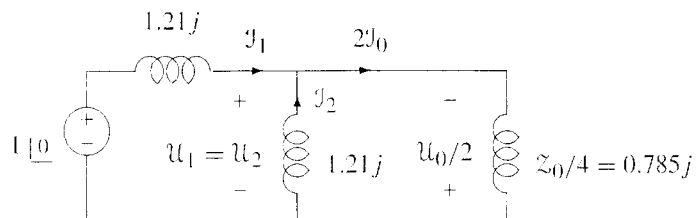


Figura 13.38 Interconexión para el fallo fase-tierra más fase-fase.

Resolviendo dicho circuito, obtenemos:

$$u_1 = u_2 = \frac{\frac{1}{1.21j}}{\frac{1}{1.21j} + \frac{1}{1.21j} + \frac{1}{0.785j}} = 0.2823$$

y las intensidades

$$J_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_1}{0.785j} = -0.1798j$$

$$J_1 = \frac{1 - u_1}{1.21j} = -0.593j$$

$$J_2 = \frac{-u_2}{1.21j} = 0.233j$$

Transformando al dominio de fases:

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5398j \\ -0.7153 \\ 0.7153 \end{bmatrix}$$

Para la obtención de las tensiones en la barra 1 sustituimos el efecto del fallo por fuentes de intensidad en el circuito de cada secuencia, como se muestra en las Figuras 13.39, 13.40 y 13.41.

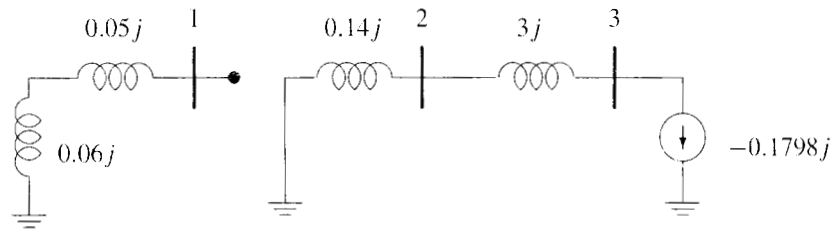


Figura 13.39 Circuito de secuencia homopolar con fallo sustituido.

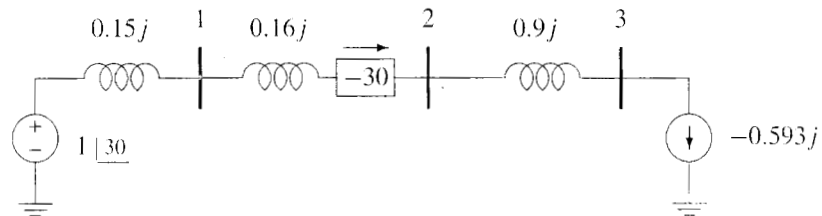


Figura 13.40 Circuito de secuencia directa con fallo sustituido.

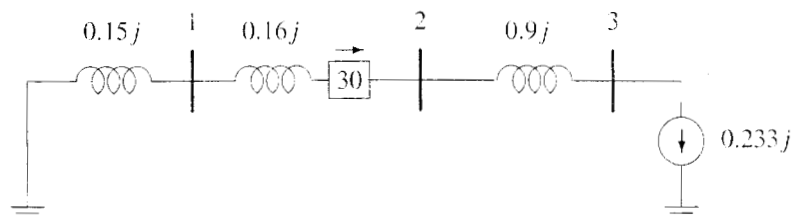


Figura 13.41 Circuito de secuencia inversa con fallo sustituido.

Analizando dichos circuitos tenemos las tensiones en la barra 1 (teniendo en cuenta los desfases):

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \angle_{30} - 0.15j \cdot 0.593 \angle_{-60} = 0.911 \angle_{30} \\ u_2 &= -0.15j \cdot 0.233 \angle_{60} = 0.035 \angle_{-30} \end{aligned}$$

y transformando a fases

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9289 \angle_{28.13} \\ 0.876 \angle_{-90} \\ 0.9289 \angle_{151.8} \end{bmatrix}$$

13.8. Por un fallo no deseado en la barra 3 del sistema de la Figura 13.42, se abre la fase 'a' de la línea 2-3.

Determinar:

1. Valor mínimo de la reactancia de puesta a tierra de la carga, X_c , para que $|J| < 0.1$.
2. Tensión de la fase 'a' en bornas del interruptor para dicho valor de X_c .

Datos:

- Generador: $\begin{cases} X_0 = 0.05 \\ X_1 = X_2 = 0.1 \end{cases}$
- Transformador T1: $\begin{cases} X_0 = 0.1 \\ X_1 = X_2 = 0.12 \end{cases}$
- Transformador T2: $\begin{cases} X_0 = 0.13 \\ X_1 = X_2 = 0.15 \end{cases}$
- Línea L23: $\begin{cases} X_0 = 0.32 \\ X_1 = X_2 = 0.1 \end{cases}$
- Carga: $\{X_0 = X_1 = X_2 = 0.3\}$

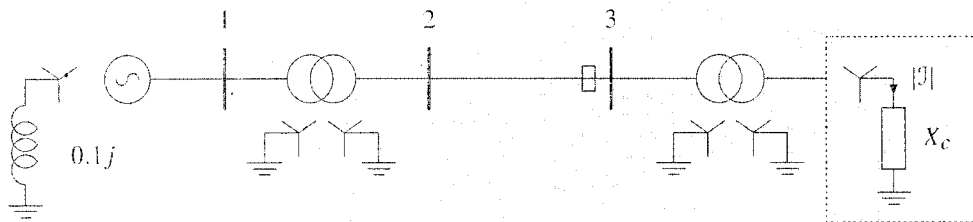


Figura 13.42 Sistema.

Resolución

Los circuitos que el sistema presenta a las secuencias se muestran en las Figuras 13.43, 13.44 y 13.45. En ellos se ha distinguido entre la parte del sistema a la izquierda del fallo, hasta el punto 3', y la parte a la derecha, desde la barra 3, a fin de tratar adecuadamente este fallo longitudinal.

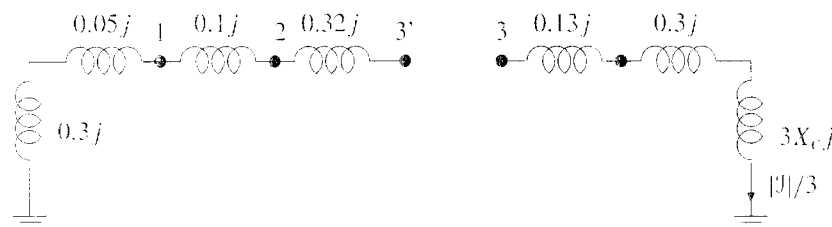
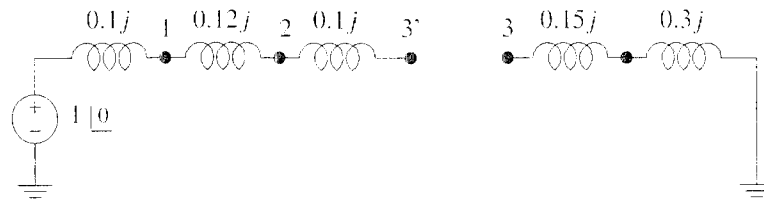
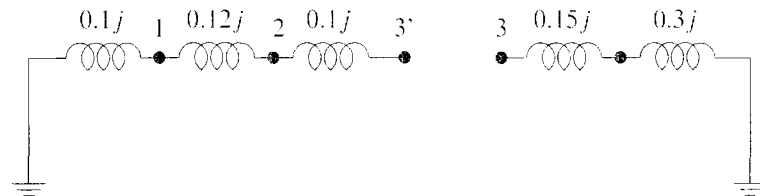
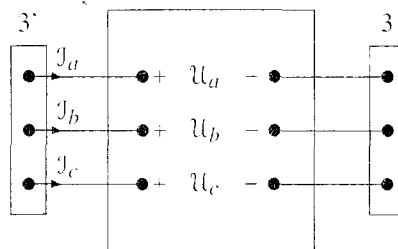


Figura 13.43 Circuito de homopolar.


Figura 13.44 Circuito de directa.

Figura 13.45 Circuito de inversa.

Para escribir las ecuaciones de este fallo, usaremos tensiones \mathcal{U}_a , \mathcal{U}_b y \mathcal{U}_c de las respectivas fases entre 3' y 3, así como \mathcal{I}_a , \mathcal{I}_b e \mathcal{I}_c , intensidades por las fases de la línea con sentido de 3' a 3. Dichas referencias se muestran en la Figura 13.46.


Figura 13.46 Referencias para el fallo de apertura de fase.

Podremos, por tanto, escribir las ecuaciones del fallo como:

$$\mathcal{I}_a = 0$$

$$\mathcal{U}_b = 0$$

$$\mathcal{U}_c = 0$$

Pasando a secuencias:

$$\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = 0$$

$$\mathcal{U}_0 + a^2\mathcal{U}_1 + a\mathcal{U}_2 = 0$$

$$\mathcal{U}_0 + a\mathcal{U}_1 + a^2\mathcal{U}_2 = 0$$

Restando la tercera ecuación a la segunda: $(a^2 - a)(\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2) = 0$, y por tanto $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$. Sustituyendo en la segunda, tenemos:

$$\mathcal{U}_0 + (a^2 + a)\mathcal{U}_1 = 0$$

y puesto que $a^2 + a = -1$, concluimos que las tres ecuaciones en secuencias son:

$$\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = 0$$

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$$

Dichas ecuaciones corresponden a una interconexión en paralelo de las tres secuencias. Para que dicha conexión resulte más clara, la realizaremos con los equivalentes Thevenin de cada secuencia entre los

puntos 3' y 3. Dichos equivalentes se muestran en la Figura 13.47; mientras que el circuito de interconexión se muestra en la Figura 13.48.

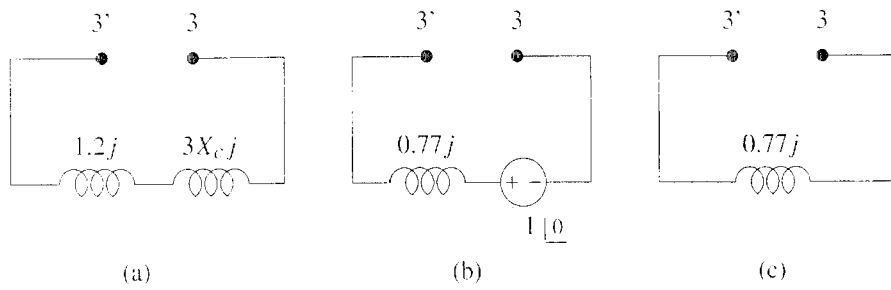


Figura 13.47 Equivalentes Thevenin entre 3' y 3 de los circuitos de secuencias: (a) homopolar, (b) directa, (c) inversa.

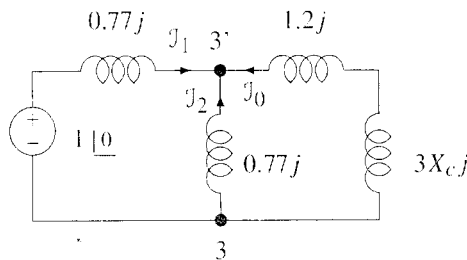


Figura 13.48 Circuito de interconexión para el fallo de apertura de fase.

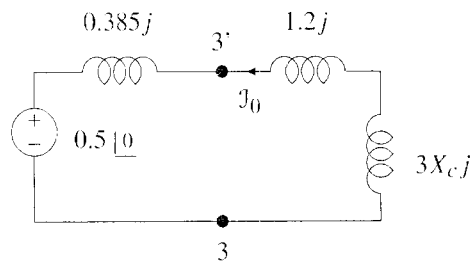


Figura 13.49 Circuito de interconexión modificado.

Para conseguir el valor de J_0 de este último circuito con facilidad, reducimos las dos ramas de la izquierda hasta conseguir el circuito de la Figura 13.49. De éste obtenemos:

$$J_0 = \frac{-0.5}{1.585j + 3X_cj}$$

y por tanto

$$|J| = |3J_0| = \frac{1.5}{1.585 + 3X_c}$$

La restricción $|I| < 0.1$ nos lleva a $X_c > 4.47$.

La tensión en bornas de la fase 'a' de la protección con $X_c = 4.47$ es:

$$u_a = u_0 + u_1 + u_2 = 3u_0 = -3J_0X_0 = 3 \frac{-0.5}{1.585j + 3X_cj} (1.2j + 3X_cj) = -1.46$$

13.9. Las matrices de impedancias de nudos de la red de la Figura 13.50 son las siguientes:

$$Z_{n1} = Z_{n2} = j \begin{bmatrix} 0.0454 & 0.0367 & 0.0259 \\ 0.0367 & 0.0793 & 0.0324 \\ 0.0259 & 0.0324 & 0.0405 \end{bmatrix}$$

$$Z_{n0} = j \begin{bmatrix} 0.0245 & 0.0152 & 0.0037 \\ 0.0152 & 0.1240 & 0.0098 \\ 0.0037 & 0.0098 & 0.0175 \end{bmatrix}$$

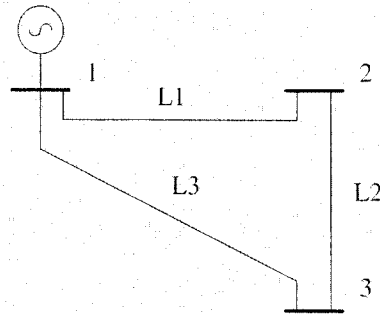


Figura 13.50 Sistema original.

Se añade a la red la línea L4 tal y como se indica en la Figura 13.51, siendo las impedancias a las tres secuencias de dicha línea $Z_1 = Z_2 = 0.1j$ y $Z_0 = 0.2j$.

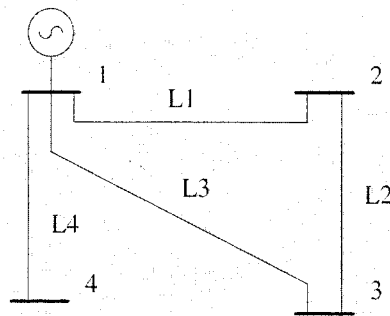


Figura 13.51 Sistema ampliado.

Determinar las intensidades de cortocircuito de la red de la Figura 13.51 para los siguientes tipos de fallos en el nudo 4:

1. Trifásico rígido.
2. Fase-tierra rígido.
3. Fase-fase rígido.
4. Fase-fase-tierra rígido.

Determinar, de igual modo, las tensiones en el punto del fallo en cada caso.

Resolución

Las matrices de impedancias de nudos nos proporcionan en sus elementos diagonales la impedancia equivalente de la red en los distintos nudos, por lo que tomando en cada secuencia la impedancia correspondiente al nudo 3, basta con considerar la línea L4 para conseguir los equivalentes desde el nudo 4, como se muestra en las Figuras 13.52, 13.53 y 13.54.

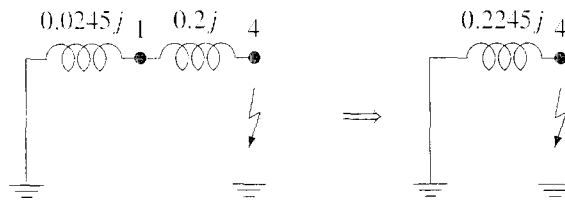


Figura 13.52 Circuito de homopolar y equivalente Thevenin.

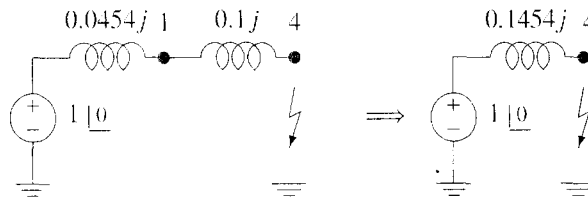


Figura 13.53 Circuito de directa y equivalente Thevenin.

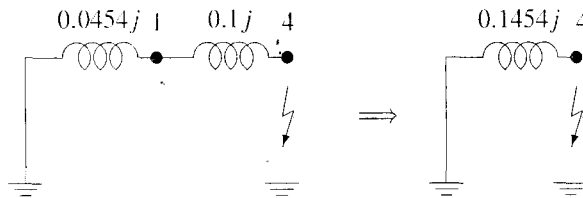


Figura 13.54 Circuito de inversa y equivalente Thevenin.

Fallo trifásico rígido: en un fallo equilibrado no intervienen las secuencias inversa y homopolar, $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_2 = 0$, con lo que el estudio se reduce al circuito de directa:

$$\mathcal{J}_{cc} = \frac{1 \angle 0}{0.1454j} = -6.8776j$$

y $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}_b = \mathcal{U}_c = \mathcal{U}_1 = 1 \angle 0 - 1 \angle 0 = 0$.

Fallo fase-tierra rígido: las ecuaciones de este fallo corresponden a la interconexión del circuito de la Figura 13.55.

Es inmediato obtener $\mathcal{J}_1 = -1.9406j$ y por tanto $\mathcal{J}_{cc} = -5.8219j$.

Las tensiones las obtenemos de

$$\mathcal{U}_{f0} = -0.2245j \mathcal{J}_{f0} = -0.4357$$

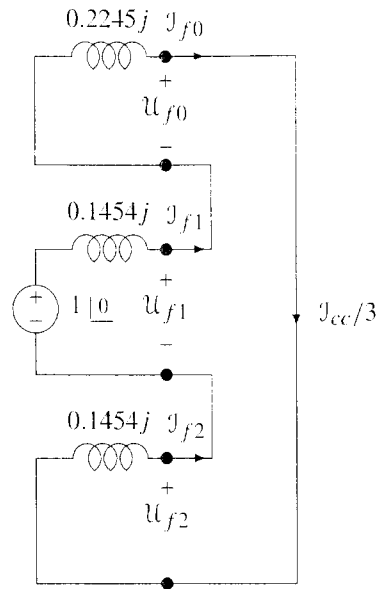
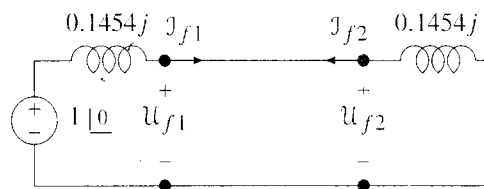
$$\mathcal{U}_{f1} = 1 - 0.1454j \mathcal{J}_{f1} = 0.7178$$

$$\mathcal{U}_{f2} = -0.1454j \mathcal{J}_{f2} = -0.2822$$

y las tensiones de fase:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_a \\ \mathcal{U}_b \\ \mathcal{U}_c \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{f0} \\ \mathcal{U}_{f1} \\ \mathcal{U}_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0849 \angle -127.04 \\ 1.0849 \angle -127.04 \end{bmatrix}$$

Fallo fase-fase rígido: la interconexión para este fallo es la que se muestra en la Figura 13.56.


Figura 13.55 Interconexión para el fallo fase-tierra.

Figura 13.56 Interconexión para el fallo fase-fase.

Las intensidades se obtienen como:

$$J_{f1} = -J_{f2} = \frac{1 \angle 0}{0.1454j + 0.1454j} = -3.4388j$$

que junto a $J_{f0} = 0$ nos permiten obtener las intensidades del fallo

$$J_b = -J_c = J_{f0} + a^2 J_{f1} + a J_{f2} = -\sqrt{3}j J_{f1} = -5.9562$$

Las tensiones $U_{fi} = U_{f1} = U_{f2}$ se pueden obtener como:

$$U_{fi} = 0.1454j J_{f1} = 0.5$$

y las tensiones de fases

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} U_{f0} \\ U_{f1} \\ U_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Fallo fase-fase-tierra rígido: el circuito de interconexión para este fallo es el de la Figura 13.57, en el que obtenemos las tensiones U_{fi} a partir de la ecuación nodal

$$\left(\frac{1}{0.2245j} + \frac{1}{0.1454j} + \frac{1}{0.1454j} \right) U_{fi} = \frac{1 \angle 0}{0.1454j}$$

$$U_{fi} = U_{f0} = U_{f1} = U_{f2} = 0.3777$$

Puesto que es obvio que $U_b = U_c = 0$ sólo tendremos que obtener U_a :

$$U_a = U_{f0} + U_{f1} + U_{f2} = 3U_{fi} = 1.1331$$

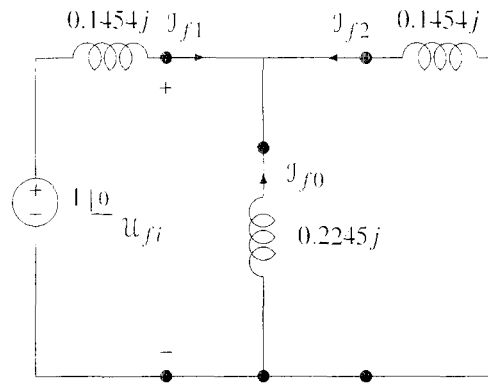


Figura 13.57 Interconexión para el fallo fase-fase-tierra.

En cuanto a las intensidades:

$$J_{f0} = \frac{-u_{fi}}{0.2245j} = 1.6824j$$

$$J_{f1} = \frac{1 - u_{f1}}{0.1454j} = -4.28j$$

$$J_{f2} = \frac{-u_{f2}}{0.1454j} = 2.5976j$$

Las intensidades por las fases del fallo serán:

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} J_{f0} \\ J_{f1} \\ J_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.4687 \angle 157.04 \\ 6.4687 \angle 22.96 \end{bmatrix}$$

y la intensidad a tierra $3J_{f0} = J_b + J_c = 5.047j$.

13.10. Se conocen las matrices de impedancias de nudos a secuencias directa e inversa, Z_{n1} y Z_{n2} , de la red de tres nudos de la Figura 13.58. Dichas matrices, expresadas en p.u. sobre una base $S_B = 100$ MVA y $V_B = 66$ kV, son:

$$Z_{n1} = Z_{n2} = j \begin{bmatrix} 0.28 & 0.12 & 0.18 \\ 0.12 & 0.12 & 0.12 \\ 0.18 & 0.12 & 0.25 \end{bmatrix}$$

A la barra 3 se conecta un transformador 66/20 kV con $X_{cc} = 0.1j$ que alimenta una carga conectada a través del nudo 4, según se muestra en la Figura 13.58.

Suponiendo la red en vacío, se pide:

1. Valor de la reactancia X_g para limitar la intensidad de falta ante un fallo fase-tierra en la barra 4 a 350 A como máximo.
2. Determinar si sería posible situar un pararrayos en la barra 4 de la red cuando $X_g = 8$ p.u., teniendo en cuenta la recomendación de la CEI (Comisión Electrotécnica Internacional) de que si se desea conectar un pararrayos en un punto, el valor de C_g para un fallo en dicho punto cumpla $C_g \leq 80\%$.

El coeficiente de tierra, C_g , se define como:

$$C_g = \frac{\text{Máxima tensión de fase para una falta fase-tierra}}{\text{Máxima tensión de línea antes del fallo}} \cdot 100$$

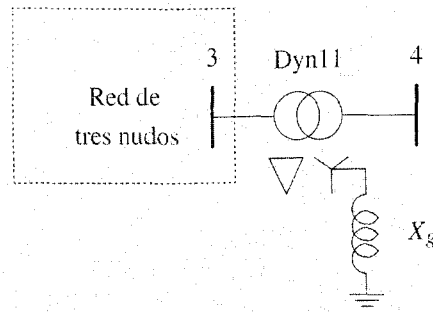


Figura 13.58 Sistema.

Resolución

Representamos en las Figuras 13.59 y 13.60 los circuitos a las tres secuencias. Tras obtener las impedancias equivalentes desde el nudo 4 que presentan dichas secuencias,

$$Z_{eq0} = 0.1j + 3X_gj$$

$$Z_{eq1} = Z_{eq2} = 0.25j + 0.1j = 0.35j$$

usamos el circuito de interconexión para el fallo fase-tierra, Figura 13.61, para resolver:

$$I_{f0} = \frac{I_{cc}}{3} = \frac{1}{0.35j + 0.35j + 0.1j + 3X_gj}$$

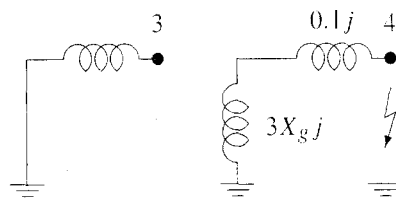


Figura 13.59 Circuito de secuencia homopolar.

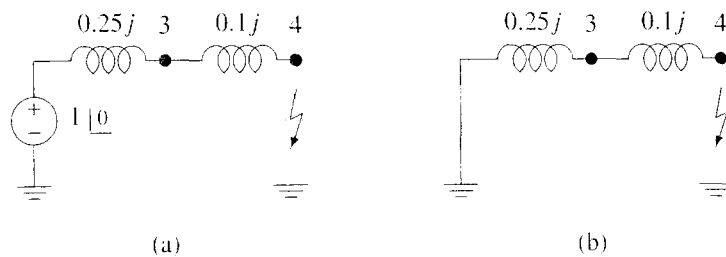


Figura 13.60 Circuitos de secuencias: (a) directa, (b) inversa.

Por tanto, la intensidad de falta en p.u. es:

$$|I_{cc}| = \frac{3}{0.8 + 3X_g}$$

Para pasar la limitación de 350 A a p.u., usaremos la intensidad base

$$I_B = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_B} = \frac{100 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 20 \cdot 10^3} = 2886.751$$

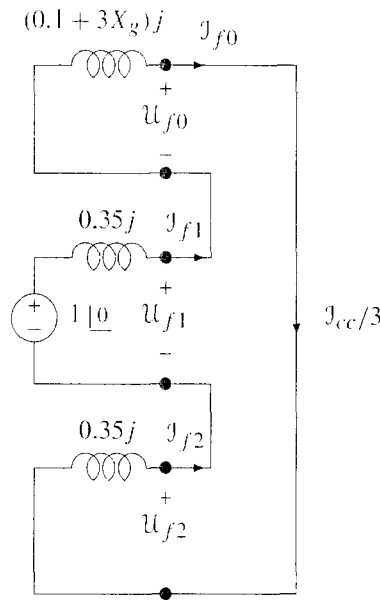


Figura 13.61 Interconexión de circuitos.

por lo que el límite en p.u. es:

$$I_{\text{lim}} = 350/I_B = 0.1212$$

Vemos cómo la restricción $|J_{cc}| < I_{\text{lim}}$ nos lleva a:

$$X_g \geq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{0.1212} - 0.8 \right)$$

y por tanto a $X_g \geq 7.98$.

Respecto al segundo apartado, usaremos $X_g = 8$ para obtener las intensidades:

$$J_{f0} = J_{f1} = J_{f2} = -0.0403j$$

Las tensiones las obtenemos como:

$$U_{f0} = -Z_{eq0}J_{f0} = -0.9718$$

$$U_{f1} = 1 - Z_{eq1}J_{f1} = 0.9859$$

$$U_{f2} = -Z_{eq2}J_{f2} = -0.0141$$

Las tensiones de fase son:

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} U_{f0} \\ U_{f1} \\ U_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.696 \angle -149.28 \\ 1.696 \angle 149.28 \end{bmatrix}$$

Tenemos pues que la máxima tensión de fase durante el fallo la encontramos tanto en la fase 'b' como en la fase 'c', y vale $1.696 \cdot 20/\sqrt{3} = 19.578$ kV. El coeficiente de tierra valdrá:

$$C_g = \frac{19.578}{20} = 0.979$$

y puesto que C_g ha resultado mayor que 0.8, no se recomienda el uso de pararrayos en el nudo 4.

13.11. Se conocen las matrices de impedancias de nudos de las redes a secuencia directa, inversa y homopolar correspondientes a la red de tres nudos indicada en la Figura 13.62:

$$Z_{n1} = Z_{n2} = j \begin{bmatrix} 0.12 & 0.12 & 0.12 \\ 0.12 & 0.2867 & 0.18 \\ 0.12 & 0.18 & 0.2568 \end{bmatrix} \quad Z_{n0} = j \begin{bmatrix} 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.7374 & 0.3503 \\ 0.06 & 0.3503 & 0.6987 \end{bmatrix}$$

1. Calcular las intensidades y tensiones en el nudo 4 cuando se produce un cortocircuito rígido fase-tierra en dicho nudo.
2. Determinar la potencia de cortocircuito en el nudo 4.

Datos:

- Generador G1: $\begin{cases} X_0 = 0.07 \\ X_1 = X_2 = 0.15 \end{cases}$
- Generador G2: $\begin{cases} X_0 = 0.05 \\ X_1 = X_2 = 0.12 \end{cases}$
- Transformador T1: $\begin{cases} X_{cc} = 0.08 \end{cases}$
- Transformador T2: $\begin{cases} X_{cc} = 0.10 \end{cases}$

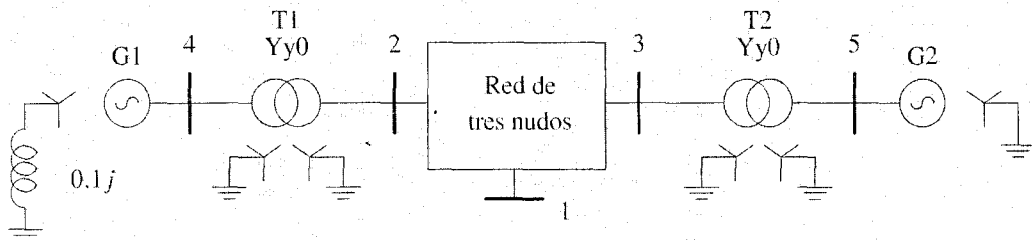


Figura 13.62 Sistema.

Resolución

Es necesario conocer el equivalente Thevenin de cada secuencia en el nudo 4. El principal problema para ello, es obtener la impedancia equivalente de la red de tres nudos en el nudo 2 cuando en el nudo 3 tiene conectada una impedancia Z_i , la del transformador 3-5 más la del generador G2. Así, para una secuencia i ,

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

Las dos últimas ecuaciones quedan

$$U_2 = Z_{22}J_2 + Z_{23}J_3$$

$$U_3 = Z_{32}J_2 + Z_{33}J_3$$

y usando $J_3 = \frac{-U_3}{Z_i}$, obtenemos:

$$Z'_{22} = \frac{U_2}{J_2} = Z_{22} - \frac{Z_{23}Z_{32}}{Z_i + Z_{33}}$$

Evaluando para las distintas secuencias tendremos:

- Homopolar: $Z_0 = 0.1j + 0.05j = 0.15j$, y

$$Z'_{22} = 0.7374j - \frac{0.3503j \cdot 0.3503j}{0.15j + 0.6987j} = 0.5928j$$

- Directa e inversa: $Z_1 = Z_2 = 0.1j + 0.12j = 0.22j$, y

$$Z'_{22} = 0.2867j - \frac{0.18j \cdot 0.18j}{0.22j + 0.2568j} = 0.2187j$$

Las Figuras 13.63, 13.64 y 13.65 muestran el sistema a las distintas secuencias. En ellas, tanto la red de tres nudos como los elementos a su derecha se han reducido a sus equivalentes desde el nudo 2.

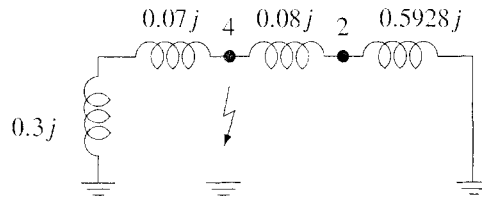


Figura 13.63 Circuito de secuencia homopolar.

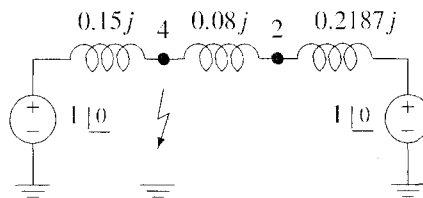


Figura 13.64 Circuito de secuencia directa.

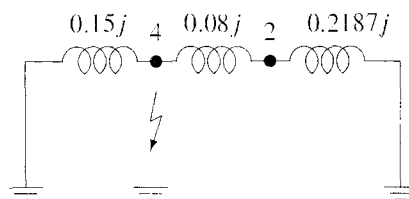


Figura 13.65 Circuito de secuencia inversa.

Para estudiar el fallo en el nudo 4, usaremos el equivalente Thevenin a cada secuencia en dicho nudo, los cuales se muestran en la Figura 13.66.

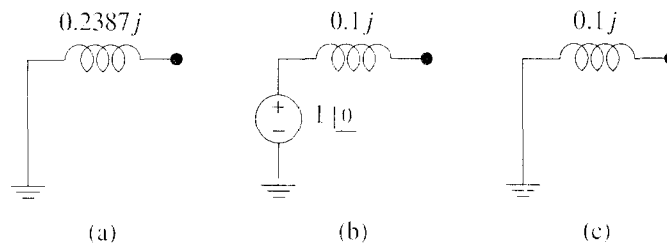


Figura 13.66 Equivalentes Thevenin a secuencias: (a) homopolar, (b) directa, (c) inversa.

Por tratarse de una fallo fase-tierra, el circuito de interconexión será el de la Figura 13.67, del cual se obtiene:

$$I_{f0} = I_{f1} = I_{f2} = \frac{I}{0.2387j + 0.1j + 0.1j} = -2.28j$$

y por tanto la intensidad del fallo

$$I_a = I_{f0} + I_{f1} + I_{f2} = -6.838j$$

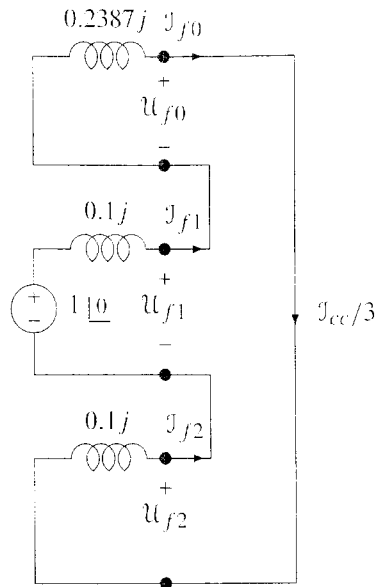


Figura 13.67 Circuito de interconexión para el fallo fase-tierra.

Las tensiones en secuencias las obtenemos de

$$\begin{aligned} U_{f0} &= -Z_{eq0} J_{f0} = -0.5442 \\ U_{f1} &= 1 - Z_{eq1} J_{f1} = 0.772 \\ U_{f2} &= -Z_{eq2} J_{f2} = -0.228 \end{aligned}$$

y las tensiones de fase:

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} U_{f0} \\ U_{f1} \\ U_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.19 \angle -133.3 \\ 1.19 \angle 133.3 \end{bmatrix}$$

En cuanto a las intensidades, conocemos las intensidades hacia el fallo, para obtener las aportaciones que hacen tanto el generador G1 como el resto de la red, usaremos los circuitos de secuencias con el fallo sustituido por fuentes de tensión, como se muestra en las Figuras 13.68, 13.69 y 13.70.

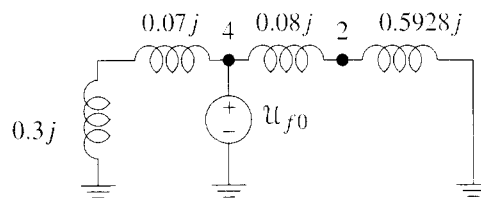


Figura 13.68 Circuito de secuencia homopolar con fallo sustituido.

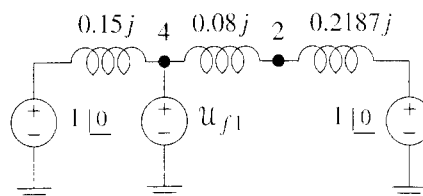


Figura 13.69 Circuito de secuencia directa con fallo sustituido.

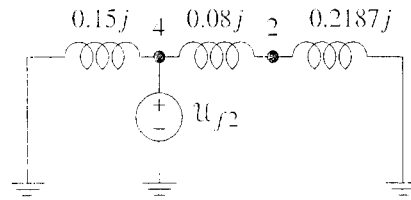


Figura 13.70 Circuito de secuencia inversa con fallo sustituido.

Las distintas aportaciones que obtenemos son:

- Homopolar (Figura 13.68):
 - Generador: $J_1^S = -1.471j$
 - Red: $J_1^R = -0.81j$
- Directa (Figura 13.69):
 - Generador: $J_1^S = -1.518j$
 - Red: $J_1^R = -0.7622j$
- Inversa (Figura 13.70):
 - Generador: $J_1^S = -1.518j$
 - Red: $J_1^R = -0.7622j$

Convirtiendo a intensidades de fase, tenemos:

- Generador:

$$\begin{bmatrix} J_a^S \\ J_b^S \\ J_c^S \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} J_0^S \\ J_1^S \\ J_2^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.507j \\ 0.047j \\ 0.047j \end{bmatrix}$$

- Red:

$$\begin{bmatrix} J_a^R \\ J_b^R \\ J_c^R \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} J_0^R \\ J_1^R \\ J_2^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.3344j \\ -0.0478j \\ -0.0478j \end{bmatrix}$$

El segundo apartado del problema no requiere más que usar la reactancia Thevenin de secuencia directa en el nudo 4, que ya se obtuvo:

$$S_{cc} \approx \frac{1}{X_{eq}} = \frac{1}{0.1} = 10$$

13.12. Las matrices de impedancias de nudos para una red de cinco nudos son:

$$Z_{n1} = Z_{n2} = j \begin{bmatrix} 0.1177 & 0.0995 & 0.0263 & 0.0483 & 0.0776 \\ & 0.1526 & 0.0404 & 0.074 & 0.1189 \\ & & 0.0989 & 0.0814 & 0.0580 \\ & & & 0.1492 & 0.1062 \\ & & & & 0.2849 \end{bmatrix}$$

$$Z_{n0} = j \begin{bmatrix} 0.06 & 0.06 & 0 & 0.06 & 0.06 \\ & 0.14 & 0 & 0.14 & 0.14 \\ & & 0.0565 & 0 & 0 \\ & & & 0.6677 & 0.3613 \\ & & & & 0.6102 \end{bmatrix}$$

Al nudo 5 se conectan un transformador de $Z_{cc} = 0.11j$ y un grupo generador de $Z_1 = Z_2 = 0.15j$ y $Z_0 = 0.06j$, como se indica en la Figura 13.71.

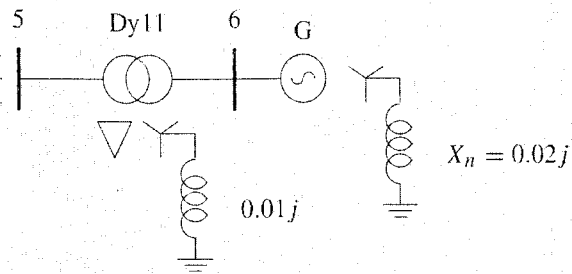


Figura 13.71 Sistema.

1. Calcular las tensiones en las fases de la barra 4 ante un fallo fase-tierra en 6.
2. Valor que debe tener X_n para que la corriente de fallo sea inferior a 10 p.u.

Resolución

Con el elemento Z_{55} de cada matriz de impedancias de nudos, tenemos la impedancia equivalente de la red en el nudo 5, con lo que podemos representar los circuitos a las tres secuencias del sistema que nos incumbe. Dichos circuitos, junto a los equivalentes Thevenin que presentan en el nudo 6 se muestran en las Figuras 13.72, 13.73 y 13.74.

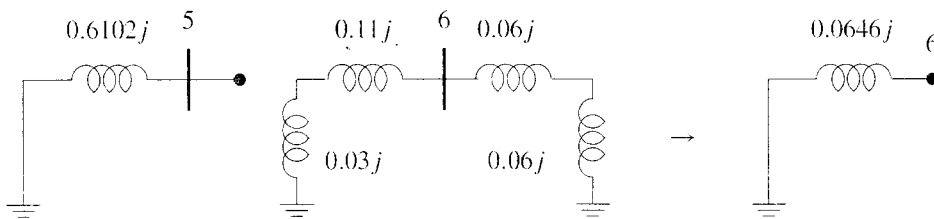


Figura 13.72 Circuito de homopolar.

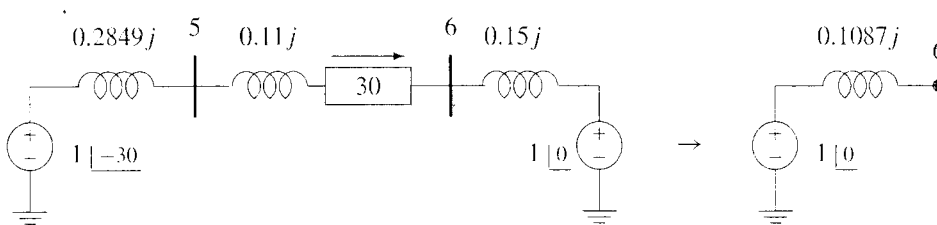


Figura 13.73 Circuito de directa.

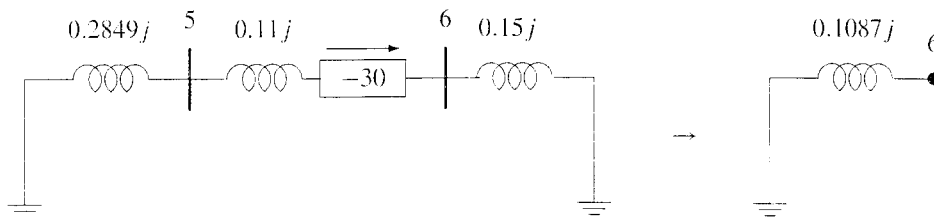


Figura 13.74 Circuito de inversa.

El fallo fase-tierra en el nudo 6 se calcula usando el circuito de interconexión de la Figura 13.75.

$$I_{fi} = I_a/3 = 3.546 \angle -90$$

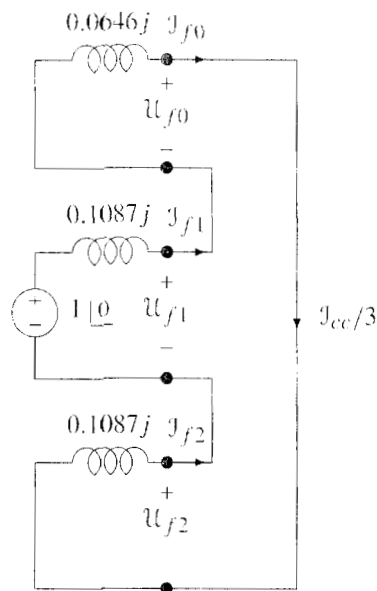


Figura 13.75 Circuito de interconexión para el fallo fase-tierra.

y por tanto la intensidad del fallo será:

$$J_{cc} = 10.638 \angle -90$$

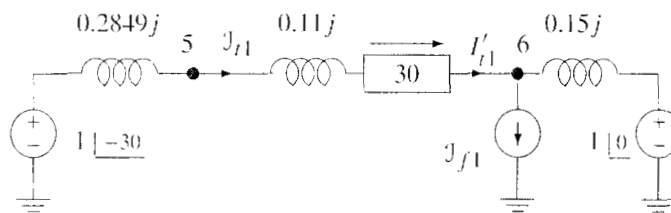


Figura 13.76 Circuito de secuencia directa con fallo sustituido.

Para obtener las intensidades en las distintas secuencias que pasan por el transformador, sustituimos el fallo en el circuito de cada secuencia por una fuente independiente, en esta ocasión usaremos una fuente de intensidad, como mostramos en el circuito de la Figura 13.76 para la secuencia directa. En cada secuencia i , distinguiremos entre intensidad que llega al nudo 6 a través del transformador, J'_{ti} , y la intensidad que parte del nudo 5, J_{ti} ; siendo la diferencia entre ellas en las secuencias directa e inversa sólo la debida al desfase introducido por el transformador. De este modo, obtenemos las J'_{ti} mediante divisores de intensidad (nótese que en este caso concreto no afectan ni fuentes ni desfases):

$$J'_{t0} = \frac{0.12j}{0.14j + 0.12j} J_{f0}$$

$$J'_{t1} = \frac{0.15j}{0.15j + 0.3949j} J_{f1} = 0.976 \angle -90$$

$$I'_{t2} = \frac{0.15j}{0.15j + 0.3949j} J_{f2} = 0.976 \angle -90$$

Las magnitudes en alta tensión son:

$$J_{t0} = 0$$

$$J_{t1} = I'_{t1} \cdot 1 \angle -30 = 0.976 \angle -120$$

$$J_{t2} = I'_{t2} \cdot 1 \angle 30 = 0.976 \angle -60$$

El teorema de compensación, nos dice que un montaje como el de la Figura 13.77 nos da los Δu_j de los distintos nudos $j = 1, 2, 3, 4, 5$, en la situación de fallo en la que la intensidad entrante al nudo 5 es $-J_{fi}$ en cada secuencia i .

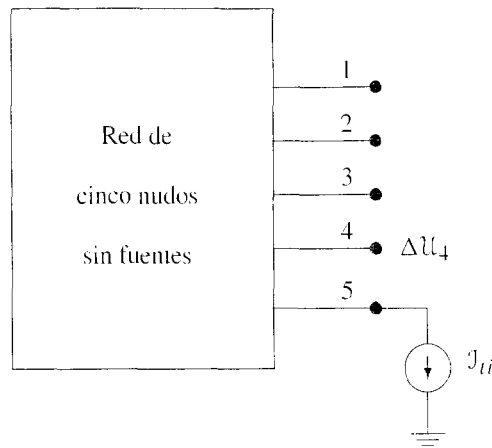


Figura 13.77 Aplicación del teorema de compensación.

- Para secuencia homopolar:

$$\Delta u_4 = Z_{45} \cdot (-J_{f0}) = 0$$

- Secuencia directa:

$$\Delta u_4 = Z_{45} \cdot (-J_{f1}) = 0.1062j \cdot (-0.976 \angle -120^\circ) = -0.1036 \angle -30^\circ$$

- Secuencia inversa:

$$\Delta u_4 = Z_{45} \cdot (-J_{f2}) = 0.1062j \cdot (-0.976 \angle -60^\circ) = -0.1036 \angle 30^\circ$$

Sumando a los incrementos calculados, las tensiones previas al fallo, obtenemos las tensiones posfalta del nudo 4:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1036 \angle -30^\circ \\ -0.1036 \angle 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9118 \angle 3.26^\circ \\ -0.1036 \angle 30^\circ \end{bmatrix}$$

y pasando a fases

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8206 \\ 0.9234 \angle -110.312^\circ \\ 1 \angle 120^\circ \end{bmatrix}$$

Respecto al Apartado 2, obtendremos en primer lugar la expresión de la impedancia equivalente del circuito de homopolar para una reactancia X_n genérica. Observando el circuito de la Figura 13.72:

$$Z_{eq0} = \frac{1}{\frac{1}{0.14j} + \frac{1}{0.06j + 3X_nj}}$$

y teniendo en cuenta la restricción $|J_{fa}| < 10$, imponemos

$$|J_{fi}| = |J_a|/3 = 10/3 \geq \frac{1}{|Z_{eq0} + 0.1087j + 0.1087j|}$$

tenemos $|Z_{eq0}| \geq 0.0826$ que conduce a $X_n \geq 0.047$.

13.13. Se conocen las matrices de impedancias de nudos a las distintas secuencias, de un sistema de 4 nudos incluyendo dos generadores:

$$Z_{n1} = Z_{n2} = j \begin{bmatrix} 0.080 & 0.066 & 0.038 & 0.056 \\ & 0.132 & 0.054 & 0.065 \\ & & 0.118 & 0.084 \\ \dots & & & 0.243 \end{bmatrix} \quad Z_{n0} = j \begin{bmatrix} 0.038 & 0.023 & 0.003 \\ & 0.196 & 0.026 \\ \dots & & 0.056 \end{bmatrix}$$

El circuito equivalente a la secuencia homopolar está abierto en el nudo 4, por lo que dicho nudo no aparece en la matriz correspondiente.

Suponiendo que el sistema es equilibrado y se encuentra inicialmente en vacío, con todas las tensiones a 1.0 p.u., determinar, para un fallo fase-fase rígido en el nudo 2:

1. Las intensidades de cortocircuito en el punto del fallo.
2. Las componentes simétricas de las tensiones en todos los nudos durante el fallo.

Resolución

Usando las impedancias equivalentes en el nudo 2 que nos proporcionan las matrices de impedancias de nudos, $Z_{eq1} = Z_{eq2} = 0.132j$, y la interconexión correspondiente a un fallo fase-fase, tal y como se muestra en la Figura 13.78, tenemos:

$$J_{f1} = -J_{f2} = \frac{1 \angle 0}{0.132j + 0.132j} = -3.7878j$$

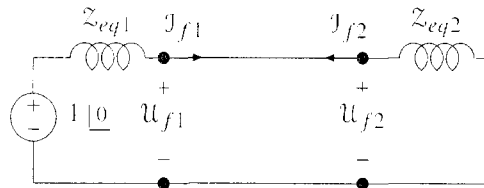


Figura 13.78 Interconexión para el fallo fase-fase.

La intensidad de homopolar es $J_{f0} = 0$ en fallos fase-fase.

Pasando a fases:

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} J_{f0} \\ J_{f1} \\ J_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6.5608 \\ 6.5608 \end{bmatrix}$$

Para el segundo apartado aplicaremos el teorema de compensación, de modo que, para la secuencia i , los incrementos de tensiones de los nudos j , ΔU_j , los obtenemos con la matriz de impedancias de nudos y el vector de intensidades entrantes de cada secuencia, como se muestra en la Figura 13.79.

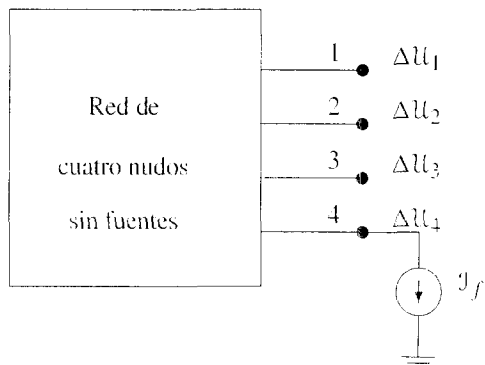


Figura 13.79 Aplicación del teorema de compensación.

- Secuencia homopolar:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \end{bmatrix} = Z_{n0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Secuencia directa:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \end{bmatrix} = Z_{n1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3.7878j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -0.5 \\ -0.204 \\ -0.246 \end{bmatrix}$$

- Secuencia inversa:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \end{bmatrix} = Z_{n1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3.7878j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.204 \\ 0.246 \end{bmatrix}$$

Las tensiones durante el fallo, las obtenemos sumando a los incrementos, las tensiones prefalía (tensión $1 \angle 0$ en secuencia directa).

- Secuencia homopolar:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

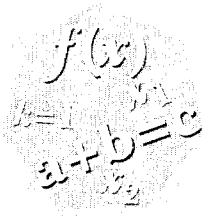
- Secuencia directa:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \angle 0 \\ 1 \angle 0 \\ 1 \angle 0 \\ 1 \angle 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.5 \\ 0.795 \\ 0.753 \end{bmatrix}$$

- Secuencia inversa:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.204 \\ 0.246 \end{bmatrix}$$





ESTABILIDAD TRANSITORIA

El problema de la *estabilidad transitoria* trata de la capacidad de los generadores de seguir funcionando en sincronismo tras la ocurrencia de una perturbación. Que los generadores se encuentren en sincronismo implica que las diferencias angulares eléctricas entre ellos permanezcan constantes, o lo que es lo mismo, que sus velocidades angulares eléctricas sean iguales. Se trata de un problema de *estabilidad de gran perturbación*, es decir, la magnitud de la perturbación que tiene lugar es tal que las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del sistema no se pueden linealizar para su análisis. Además, entra en la clasificación del problema de *estabilidad a corto plazo*, ya que considera que las dinámicas dominantes son las de los generadores síncronos y, a lo sumo, la de sus sistemas de control primario (tensión y carga-velocidad).

El uso del denominado “modelo clásico” en la definición del problema de la estabilidad implica la adopción de una serie de simplificaciones a diferentes niveles. Con carácter general se supone:

- Perturbaciones simétricas. Esta suposición permite utilizar un modelo equilibrado y además plantea el caso más desfavorable desde el punto de vista del problema a analizar.
- Puesto que las oscilaciones de la velocidad angular eléctrica en torno a la velocidad de sincronismo son pequeñas, $\omega \simeq \omega_0$, y las líneas eléctricas bajo estudio no son excesivamente largas, es correcto utilizar un modelo estático para las mismas, es decir, $X \simeq L\omega_0$.
- Para las cargas se adopta un modelo de admitancia constante en primera aproximación.

En relación al generador síncrono, componente fundamental en el problema bajo estudio:

- Potencia mecánica constante.
- Resistencias del devanado del rotor y del estator despreciables.
- Enlaces de flujo constante, lo que implica el uso de la reactancia transitoria $X' = X'_q$, y de la fuerza electromotriz tras la reactancia transitoria E' .
- Saliencia despreciable ($X_q = 0$).
- Devanados amortiguadores despreciables.
- Rotor del generador y eje del motor primario forman un sólido rígido.

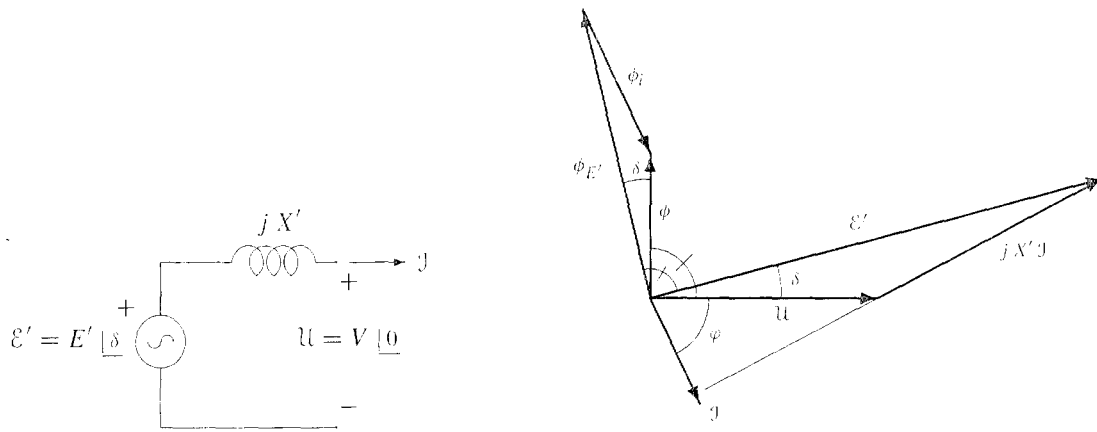


Figura 14.1 Modelo eléctrico clásico del generador síncrono en el transitorio y su diagrama vectorial.

De estas simplificaciones se obtiene el modelo eléctrico del generador representado en la Figura 14.1 (que se supone conectado a un nudo de potencia dada), y del que se deduce una potencia eléctrica de salida del mismo dada por:

$$P_e = \Re(U I^*) = \frac{E' V}{X'} \sin \delta \tag{14.1}$$

En cuanto a su ecuación dinámica, ésta resulta del equilibrio del par mecánico con los pares eléctrico y de amortiguamiento, obteniéndose

$$\frac{H}{\pi f} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_m - P_e(\delta) - D \frac{d\delta}{dt} \tag{14.2}$$

donde:

- H Constante de inercia en segundos (relación entre la energía cinética a velocidad de sincronismo y la potencia nominal).
- P_m Potencia mecánica aplicada en el eje del rotor.
- D Constante de amortiguamiento (a veces se desprecia en el modelo clásico).
- f Frecuencia del sistema en Hertzios.
- δ Ángulo relativo del eje del rotor con respecto a aquel que gira a velocidad de sincronismo (ver Figura 14.1).

Nótese, que el ángulo δ es el que enlaza la ecuación eléctrica (14.1) y mecánica (14.2) del generador. Su significado es especialmente relevante puesto que la evolución del mismo determina la estabilidad o no del generador. De acuerdo con su definición se tiene que:

$$\delta = \theta - \omega_o t \tag{14.3}$$

siendo θ la posición absoluta del rotor.

De esta última ecuación resulta que la derivada del ángulo δ con respecto al tiempo representa la velocidad relativa del rotor con respecto a la velocidad de sincronismo, es decir,

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_o \tag{14.4}$$

El denominado criterio de igualdad de áreas consiste en una técnica sencilla y bastante intuitiva que permite analizar la estabilidad transitoria para el caso de un generador conectado a un nudo de potencia

infinita cuando la constante de amortiguamiento se desprecia.

$$\frac{H}{\pi f} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e(\delta) \tag{14.5}$$

El objetivo consiste en analizar si se recupera la velocidad de sincronismo tras producirse una gran perturbación, es decir:

- En régimen permanente: $\omega = \omega_o$.
- Durante el fallo y posterior a éste: $\omega - \omega_o = \frac{d\delta}{dt}$.

Se busca un instante en que $\frac{d\delta}{dt} = 0$ con lo que, suponiendo que la máquina posee suficiente par de amortiguamiento, se garantiza el retorno a la velocidad de sincronismo tras un transitorio oscilatorio amortiguado.

Multiplicando la ecuación de oscilación (14.2) por δ e integrando se concluye que la estabilidad está garantizada si se encuentra un instante tal que el valor del ángulo δ garantice un área bajo la curva de potencia aceleradora $P_a(\delta) = (P_m - P_e)$ nula:

$$\frac{d\delta}{dt} = 0 \implies \int_{\delta_o}^{\delta} [P_m - P_e(\delta)] d\delta = 0 \tag{14.6}$$

Se denomina ángulo crítico δ_c de apertura de falta a aquel valor límite del ángulo para el cual deben actuar las protecciones y garantizar la permanencia en sincronismo. Su valor se obtiene de aplicar el criterio de las áreas según la Ecuación (14.6). El instante en que se alcanza el ángulo crítico se denomina tiempo crítico t_c y se obtiene tras integrar la ecuación de oscilación (14.2).

Si se tiene en cuenta el factor de amortiguamiento o se desea conocer la evolución exacta del ángulo δ o de la velocidad relativa a la de sincronismo, es necesario proceder a la integración de la ecuación dinámica (14.2), planteando las correspondientes ecuaciones en variables de estado, $\dot{x} = F(X)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \omega - \omega_o = \omega - 2\pi f \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\pi f}{H} \cdot [P_m - P_e(\delta)] - \frac{D\pi f}{H} \cdot [\omega - \omega_o] \end{aligned} \right\} \tag{14.7}$$

Existen diferentes algoritmos de integración numérica. Las diferencias más notables entre ellos vienen dadas por su estabilidad numérica y su sencillez a la hora de implementarlos. Habitualmente, a mayor precisión más complejidad del método. El método de Euler, el de Euler modificado y la regla trapezoidal son algunos de los más conocidos.

El método de Euler es el más sencillo de todos, optando por los dos primeros términos en el desarrollo en serie de Taylor en torno a un punto $x(t^v)$:

$$\dot{x}^v = f(x^v) \implies x^{v+1} = x^v + \dot{x}^v \Delta t$$

Se trata de sistematizar el proceso de análisis de la estabilidad transitoria en el caso de sistemas de gran dimensión, constituidos por varios generadores y cargas interconectados entre sí a través de la red eléctrica.

Es conveniente transformar el modelo eléctrico de cada generador, Figura 14.1, por una fuente de intensidad en paralelo con la reactancia transitoria tal como se indica en la Figura 14.2.

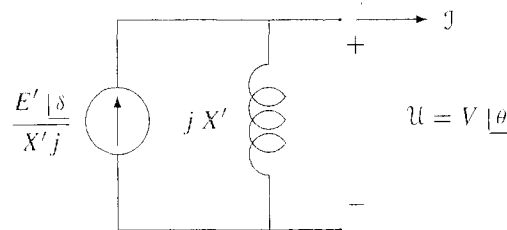


Figura 14.2 Modelo eléctrico clásico del generador síncrono en el transitorio como fuente de intensidad.

Con esta transformación es posible determinar una matriz de admitancias final Y_T , que comprenda la del sistema añadiéndole las admitancias que representan a las cargas y a las admitancias de los generadores, es decir,

$$Y_g = \frac{1}{X'_g j}; \quad Y_c = \frac{P_c - jQ_c}{V_c^2}$$

donde los subíndices g y c hacen referencia a un nudo de generación y consumo respectivamente.

De esta forma se dispone de $2n_g$ ecuaciones dinámicas en el sistema, siendo n_g el numero de generadores presentes en el mismo, que vienen dadas por las ecuaciones (14.7). En estas ecuaciones, la potencia eléctrica suministrada por cada generador g es:

$$P_{eg} = \Re(\mathcal{U}_g j_g^*) = \frac{E'_g V_g}{X'_g} \sin(\delta - \theta) \tag{14.8}$$

y el resto de las ecuaciones algebraicas se obtienen de incorporar las ecuaciones del sistema a través de la matriz de admitancias

$$\begin{bmatrix} \frac{E'_g | \delta_g}{j X'_g} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = Y_T \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \dots \\ \mathcal{U}_N \end{bmatrix} \tag{14.9}$$

La técnica de análisis se compone de los siguientes pasos:

1. Obtener los valores iniciales E'_g, δ_g^0, P_{mg} y δ_g^0 para cada generador g .
2. Determinar Y_T .
3. Actualizar Y_T si nos encontramos en un instante de tiempo en que la topología ha cambiado.
4. Determinar las tensiones \mathcal{U} resolviendo (14.9) y las potencias eléctricas suministradas por cada generador a partir de (14.8).
5. Integrar las ecuaciones dinámicas para cada generador estimando así un nuevo estado $x(t^{v+1}) = (\delta^{v+1}, \delta^{v+1})$.
6. Incrementar tiempos, $t^{v+1} = t^v + \Delta t$.
7. Si se supera el tiempo total de integración, parar; en caso contrario ir al paso 3.

PROBLEMAS RESUELTOS

14.1. Una unidad de generación inyecta una potencia activa de 1 p.u. a través de un transformador elevador y dos líneas en paralelo a una barra de potencia infinita de tensión 1 p.u. Además, se sabe que la tensión en el lado de alta del transformador se regula a un valor de 1.05 p.u. Todo el sistema trabaja a 50 Hz.

Se produce en esta situación un fallo trifásico de las líneas que parten del transformador, junto al embarrado de alta del mismo, que es despejado por las protecciones mediante la apertura de la línea en cuestión. Adoptando el modelo clásico para la máquina, encontrar el tiempo crítico de apertura del defecto.

Nota: Los parámetros del sistema se indican en la Tabla 14.1, todos bajo una misma base.

Elemento	Parámetros asociados
Generador	$X'_d = 0.15, H = 3 \text{ s}$
Transformador	$X_{cc} = 0.1$
Líneas	$X_L = 0.6$ cada una

Tabla 14.1 Datos de la red del Problema 14.1.

Resolución

El esquema en p.u. del sistema previo al fallo es el mostrado en la Figura 14.3.

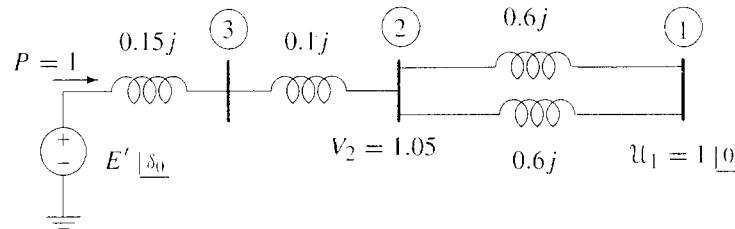


Figura 14.3 Esquema previo al fallo para el Problema 14.1.

De los datos de partida y planteando las ecuaciones de flujo que llegan desde las líneas al nudo 1, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{V_2 V_1}{\frac{X_L}{2}} \sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1 \cdot 1.05}{0.3} \sin(\theta_2 - 0) = 1 \\ Q &= \frac{V_1 \cdot V_2}{\frac{X_L}{2}} \cos(\theta_2 - \theta_1) - \frac{V_1^2}{\frac{X_L}{2}} = \frac{1.05 \cdot 1}{0.3} \cos(\theta_2 - 0) - \frac{1}{0.3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \theta_2 &= 16.602^\circ \\ Q &= 0.021 \end{aligned} \right\}$$

Con estas potencias es posible determinar la intensidad asociada a dicho flujo en el nudo 1,

$$J = \frac{P - Qj}{(U_1)^*} = \frac{1 - 0.021j}{1 | 0} = 1 |_{-1.19}$$

Se deduce así la tensión interna del generador:

$$E' |_{\delta_0} = U_1 + \left(X_{cc} + X'_d + \frac{X_L}{2} \right) jJ = 1.151 |_{28.537}$$

La curva de potencia eléctrica suministrada por el generador ideal frente a la evolución del ángulo del rotor para el período anterior a la falta es:

$$P = \frac{E' V_1}{\left(X_{cc} + X'_d + \frac{X_L}{2} \right)} \text{sen}(\delta - \theta_1) = 2.093 \text{ sen } \delta$$

que se muestra en la Figura 14.4, correspondiendo el punto de funcionamiento inicial a las coordenadas $(\delta_0 = 28.537, P = 1)$.

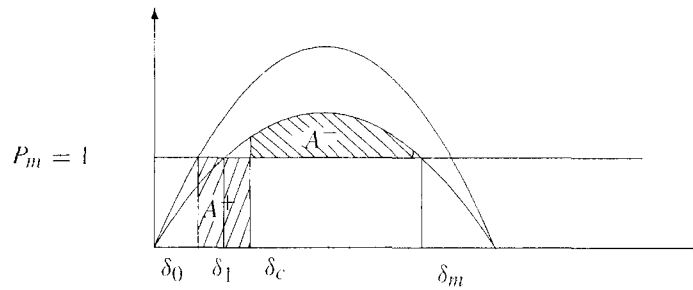


Figura 14.4 Curvas de potencia-ángulo para el Problema 14.1.

Cuando se produce el fallo la potencia eléctrica se hace cero (debido a que la tensión se anula en el punto de falta y a que se están despreciando las resistencias del sistema), manteniéndose la potencia mecánica en el eje del generador al valor de la potencia eléctrica demandada por el sistema previo al fallo, es decir, $P_m = 1$. Al despejar el cortocircuito mediante la apertura de una de las líneas, Figura 14.5, la nueva curva de potencia eléctrica P_e^{pff} vale:

$$P_e^{pff} = \frac{E' V_1}{(X_{cc} + X'_d + X_L)} \text{sen } \delta = 1.354 \text{ sen } \delta$$

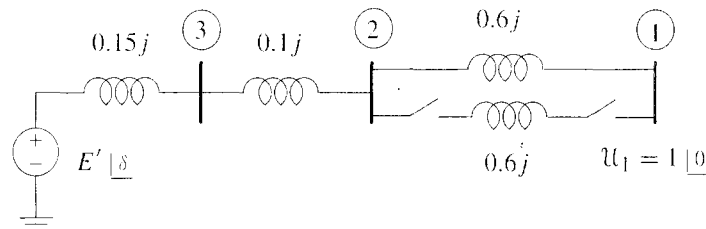


Figura 14.5 Esquema unifilar tras el despeje de la falta para el Problema 14.1.

Aplicando el criterio de las áreas e igualando la positiva con la negativa (ver Figura 14.4) se determina el ángulo crítico de despeje del cortocircuito que garantiza el sincronismo del generador.

Las áreas aceleradoras y desaceleradoras vienen dadas matemáticamente por las siguientes expresiones:

$$A^+ = (\delta_c - \delta_0) P_m$$

$$A^- = \int_{\delta_0}^{\delta_m} (1.354 \text{ sen } \delta - P_m) d\delta = 1.354(\cos \delta_c - \cos \delta_m) - (\delta_m - \delta_c)$$

con $\delta_m = \pi - \delta_1 = \pi - \text{arcsen} \left(\frac{P_m}{1.354} \right) = 2.311$ rad. Igualando las anteriores expresiones se obtiene un ángulo crítico de valor $\delta_c = 0.845$ rad.

La evolución del ángulo del rotor del generador viene gobernada, para cada intervalo de tiempo, por su ecuación dinámica. Para el intervalo correspondiente a la falta resulta:

$$\frac{H}{f\pi} \ddot{\delta} = P_m - P_e \implies \ddot{\delta} = \frac{f\pi}{H} (P_m - P_e) = \frac{50 \cdot \pi}{3} (1 - 0) = 52.36$$

y con las condiciones iniciales $\delta_0 = 0.498$ rad y $\dot{\delta} = 0$, se obtiene:

$$\delta = 0.498 + \frac{1}{2} 52.36 t^2$$

El tiempo crítico asociado al ángulo crítico, $\delta_c = 0.845$ rad, se obtiene así de esta última ecuación resultando ser de $t_c = 0.115$ s.

- 14.2.** En la red de la Figura 14.6 y parámetros los mostrados en la Tabla 14.2, la barra 3, nudo de potencia infinita y tensión 1 p.u., demanda una potencia compleja de $1 + 0.5j$ cuando se produce una maniobra que desconecta la línea que parte de dicho nudo. Al cabo de 0.2 s se desconecta también la carga del embarrado 2.

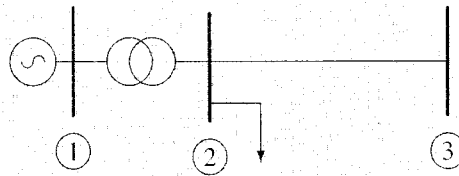


Figura 14.6 Esquema eléctrico inicial para el Problema 14.2.

Determinar el ángulo crítico y el tiempo crítico de puesta en servicio de la línea para no perder la estabilidad dinámica del sistema (en ausencia de la carga en 2).

Elemento	Parámetros asociados
Generador	$X_d = 0.16, H = 4$ s
Transformador	$X_{cc} = 0.1$
Línea	$X_L = 0.14$
Carga en 2	$S_{C2} = 0.5 + 0.2j$

Tabla 14.2 Datos de la red del Problema 14.2.

Resolución

El esquema en p.u. del sistema previo al fallo es el mostrado en la Figura 14.7.

En el problema es posible distinguir cuatro períodos:

1. Previo al fallo.
2. Desconexión de la línea eléctrica.
3. Desconexión de la carga en el nudo 2.
4. Reconexión de la línea.

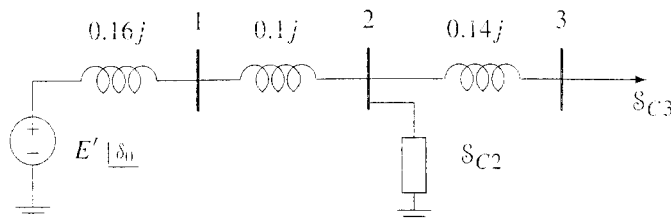


Figura 14.7 Esquema previo al fallo para el Problema 14.2.

Para el sistema inicial, de los datos de partida, y tomando origen de fases en \mathcal{U}_3 , es posible determinar la tensión del embarrado 2.

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_3 + X_{Lj} \mathcal{J}_3 = \mathcal{U}_3 + X_{Lj} \left(\frac{\mathcal{S}_{C3}}{\mathcal{U}_3} \right)^* = 1 \angle 0 + 0.14j \frac{1 - 0.5j}{1 \angle 0} = 1.079 \angle 7.454^\circ$$

y la tensión interna del generador, previa determinación de las intensidades por el mismo:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{12} &= \mathcal{J}_{C2} + \mathcal{J}_3 = \left(\frac{\mathcal{S}_{C2}}{\mathcal{U}_2} \right)^* + \mathcal{J}_3 = \frac{0.5 + 0.2j}{1.079 \angle -7.454^\circ} + (1 - 0.5j) = 1.609 \angle -22.802^\circ \implies \\ \implies E' \angle \delta_0 &= \mathcal{U}_2 + (X_{cc} + X'_{d'}) j \mathcal{J}_{12} = 1.34 \angle 23.106 \end{aligned}$$

La potencia mecánica suministrada por el generador en estas circunstancias, puesto que no existen pérdidas en ninguno de los elementos del sistema, coincide con la potencia eléctrica que demandan las cargas:

$$P_m = P_2 + P_3 = 1.5$$

Al producirse la desconexión de la línea, el esquema unifilar que se obtiene es el que se representa en la Figura 14.8.

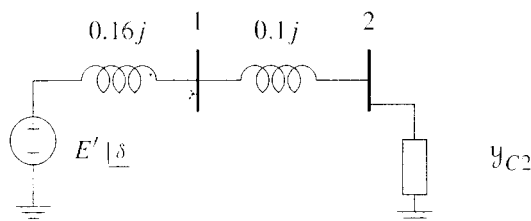


Figura 14.8 Esquema durante la desconexión de la línea del Problema 14.2.

La carga se modela ahora como carga de admitancia constante, obteniendo dicha admitancia de las condiciones de tensión existentes en la carga previas al fallo:

$$Y_{C2} = \frac{\mathcal{S}_2^*}{V_2^2} = 0.4624 \angle -21.796 \implies Z_{C2} = 2.008 + 0.803j$$

Durante este período la potencia mecánica se mantiene mientras que la potencia eléctrica demandada corresponde a la consumida por la carga conectada en 2:

$$P_e = \Re(Z_{C2}) I^2 = \Re(Z_{L2}) \left(\frac{E'}{|(X'_{d'}j + X_{cc}j + Z_{C2})|} \right)^2 = 2.008 \cdot (0.59)^2 = 0.698$$

Puesto que la potencia eléctrica demandada es menor a la potencia mecánica del generador se produce una aceleración del mismo, obteniéndose la evolución del ángulo del rotor de la ecuación dinámica correspondiente, esto es:

$$\frac{H}{f\pi} \ddot{\delta} = P_m - P_e \implies \ddot{\delta} = \frac{f\pi}{H} (P_m - P_e) = 31.491$$

Inicialmente, el rotor se encuentra en estado de régimen permanente, es decir, la velocidad de cambio del ángulo del rotor es cero, $\dot{\delta}(0) = 0$, lo cual implica, tras integrar la ecuación dinámica anterior, una evolución dada por:

$$\delta = \delta_0 + \frac{1}{2} 31.491 t^2$$

El final de esta fase tiene lugar 0.2 segundos después de iniciarse. En ese instante el ángulo del rotor llega a alcanzar el valor:

$$\delta_1 = \delta_0 + \frac{1}{2}31.491(0.2)^2 = 1.033 \text{ rad}$$

Procede ahora analizar el tercer intervalo de tiempo, en el cual se produce la desconexión de la carga del nudo 2. Esto implica que el generador queda aislado del sistema, cayendo la potencia eléctrica a cero. La ecuación de evolución del rotor es ahora

$$\ddot{\delta} = \frac{f\pi}{H}(P_m - P_e) = \frac{50\pi}{4}(1.5 - 0) = 58.905$$

con condiciones iniciales obtenidas del período inmediatamente anterior, es decir, ángulo y velocidad inicial de valores:

$$\delta_1 = 1.033 \quad \dot{\delta}_1 = \dot{\delta}(0.2) = 31.491 \cdot 0.2 = 6.298$$

La dinámica del ángulo del rotor viene dada pues por la ecuación:

$$\delta = \delta_1 + \dot{\delta}_1 t + \frac{1}{2}58.905t^2 = 1.033 + 6.298t + \frac{1}{2}58.905t^2$$

Cuando finalmente se conecta de nuevo la línea, permaneciendo la carga del embarrado 2 fuera de servicio y suponiendo que el nudo 3 sigue siendo de potencia infinita, la potencia eléctrica demandada al generador vale:

$$P_e = \frac{E'V_3}{(X'_d + X_{cc} + X_L)} \text{sen } \delta = 3.349 \text{ sen } \delta$$

Para determinar el tiempo máximo que se puede esperar para la reconexión de la línea, tiempo crítico, en aras a evitar la pérdida de estabilidad del sistema, se aplica el criterio de las áreas al igual que se ha venido haciendo hasta ahora. Se trata de igualar el área aceleradora, A^+ , con la desaceleradora, A^- , indicadas en la Figura 14.9.

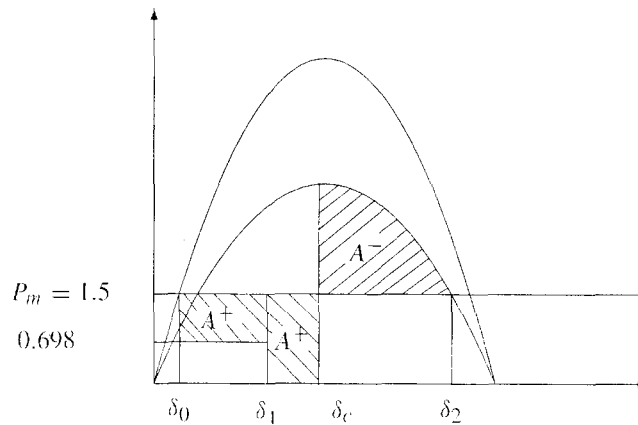


Figura 14.9 Curvas de potencia-ángulo para las distintas etapas del Problema 14.2

Se tiene, por tanto,

$$A^+ = (\delta_1 - \delta_0)(P_m - 0.698) + (\delta_c - \delta_1)P_m$$

$$A^- = \int_{\delta_c}^{\delta_2} (3.349 \text{ sen } \delta - P_m) d\delta$$

con $\delta_2 = \pi - \arcsen\left(\frac{P_m}{3.349}\right) = 2.677 \text{ rad}$.

Igualando ambas áreas se obtiene un ángulo crítico de valor $\delta_c = 1.578 \text{ rad}$.

Sustituyendo este valor en la ecuación de evolución del ángulo del rotor correspondiente al tercer período de tiempo analizado, se obtiene el instante de tiempo crítico para el reenganche de la línea:

$$\delta_c = 1.578 = 1.033 + 6.298t_c + \frac{1}{2}58.905t_c^2 \implies t_c = 0.066 \text{ s}$$

A este valor hay que añadirle los 0.2 s que le preceden desde el estado de partida, lo cual hace un tiempo total de 0.266 s.

- 14.3.** Sea la red de la Figura 14.10, de 50 Hz, cuyos datos (bajo una misma base y correspondientes al modelo transitorio para el generador) se indican en la Tabla 14.3. Con la línea L2 fuera de servicio se sabe que la tensión en el nudo 1 es $U_1 = 1.07 + 0.28j$, y que el embarrado 3 es un nudo de potencia infinita de tensión 1 p.u.

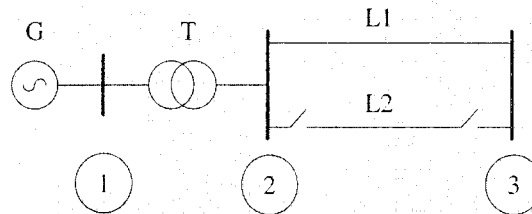


Figura 14.10 Esquema unifilar de la red del Problema 14.3.

Elemento	Parámetros asociados
Generador	$X_d' = 0.05, H = 5 \text{ s}$
Transformador	$X_{cc} = 0.2$
Línea L1	$X = 0.15$

Tabla 14.3 Datos de la red de la Figura 14.10.

1. Demostrar que el sistema es inestable ante una maniobra que desconecta transitoriamente el generador durante un tiempo de 0.37 segundos.
2. Con la línea L2 en servicio, y suponiendo en el generador las mismas condiciones previas a la maniobra del apartado anterior, esto es, potencia mecánica y tensión interna, determinar la reactancia que debe poseer la línea L2 para que el sistema sea estable frente a la misma maniobra de desconexión del generador durante 0.37 segundos.

Resolución

El esquema con magnitudes en p.u. de la red de partida es el que se muestra en la Figura 14.11.

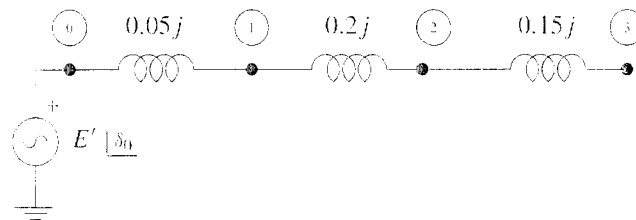


Figura 14.11 Esquema anterior al fallo para el primer apartado de la red del Problema 14.3.

Primera cuestión. Es posible distinguir tres intervalos de tiempo:

- 1.a) Antes del fallo: conexión del generador al embarrado de potencia infinita (línea L2 abierta).

- l.b) Durante el fallo: desconexión del grupo generador.
- l.c) Posterior al fallo: reconexión del generador a la red.

Previamente a la desconexión del generador se ha de determinar la tensión interna del mismo, $E' |_{\delta_0}$. Puesto que se conocen las tensiones en los nudos 1 ($U_1 = 1.07 + 0.28j = 1.106 |_{+14.664}$) y 3 ($U_3 = 1 |_0$), es posible determinar las potencias activa y reactiva inyectadas en 3, esto es,

$$P_3 = \frac{V_1 V_3}{0.35} \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) = 0.8$$

$$Q_3 = \frac{V_1 V_3}{0.35} \text{cos}(\theta_1 - \theta_3) - \frac{V_3^2}{0.35} = 0.2$$

De esta forma, la tensión interna del generador, nudo 0, vale:

$$E' |_{\delta_0} = V_3 + X_{03} j * \left(\frac{\delta_3}{V_3} \right)^* = 1 + (0.05 + 0.2 + 0.15)j \frac{0.8 - 0.2j}{1} =$$

$$= 1.08 + 0.32j = 1.126 |_{16.504}$$

y la potencia mecánica suministrada por el mismo es la inyectada en 3 puesto que las resistencias se han despreciado.

Al desconectarse el generador, resulta una potencia eléctrica nula, $P_e^{df} = 0$, por lo que la ecuación de oscilación del generador se reduce a:

$$\frac{5}{50\pi} \ddot{\delta} = 0.8$$

La integración de esta ecuación dinámica, con la condición inicial $\delta_0 = 16.504^\circ = 0.288$ rad, proporciona la siguiente evolución del ángulo del rotor:

$$\delta = \delta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\delta} t^2 = 0.288 + \frac{1}{2} 25.133 t^2$$

En $t = 0.37$ s se alcanza un ángulo $\delta_1 = 2.008$ rad, siendo este instante el de reconexión del generador a la red. En el último período (posfallo), la curva de potencia eléctrica coincide con la anterior al fallo puesto que se retoman las condiciones iniciales, y viene dada por:

$$P_e^{pf} = \frac{E' V_3}{0.4} \text{sen} \delta = 2.816 \text{sen} \delta$$

En la Figura 14.12 se muestra la curva P_e^{pf} con el punto inicial de equilibrio δ_0 a partir del cual se considera la desconexión del grupo generador, así como el instante, equivalente al ángulo δ_1 , en el que se vuelve a reconectar a la red.

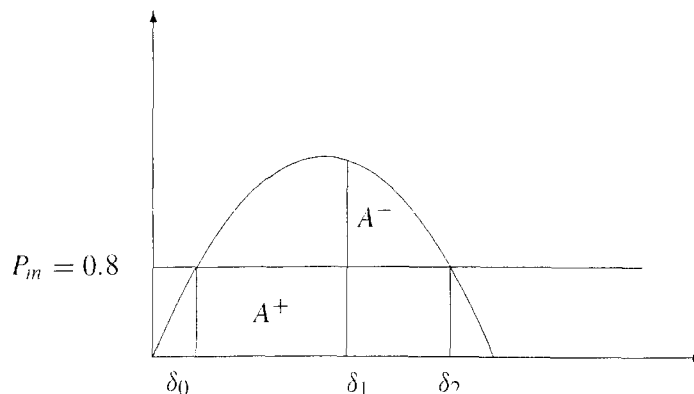


Figura 14.12 Variación de la potencia con el ángulo para el Apartado 1 de la red del Problema 14.3.

Si se tiene en cuenta el criterio de las áreas, el área aceleradora A^+ no debe superar al área desaceleradora A^- . Atendiendo a la Figura 14.12 estas áreas vienen dadas por:

$$A^+ = \int_{\delta_0}^{\delta_1} (P_m - P_e^{df}) d\delta = \int_{\delta_0}^{\delta_1} 0.8 d\delta = 1.376$$

$$A^- = \int_{\delta_1}^{\delta_2} (P_e^{pf} - P_m) d\delta = \int_{\delta_1}^{\pi - \delta_0} (2.816 \sin \delta - 0.8) d\delta = 0.831$$

Al ser $A^+ > A^-$ se tendría un sistema inestable donde el ángulo del rotor aumentaría sin control perdiendo el generador su sincronismo (lógicamente actuarían las protecciones evitando tal extremo).

Segunda cuestión. También ahora es posible distinguir tres intervalos de tiempo:

- 2.a) Antes del fallo: de acuerdo con el enunciado se mantienen en este caso la potencia mecánica del generador, $P_m = 0.8$, y su tensión interna, $E' = 1.126$. El nudo 3 continúa siendo un nudo de potencia infinita de tensión $V_3 = 1$, variando la tensión en el nudo 1.
- 2.b) Durante el fallo: se produce de nuevo la desconexión del grupo generador con lo que $P_e^{df} = 0$, exactamente igual a lo que ocurría en el primer apartado.
- 2.c) Posterior al fallo: la reconexión del generador a la red recupera la red inicial, donde la curva de potencia queda en función de la reactancia de la línea L2 desconocida.

El área aceleradora que se obtiene en esta ocasión vale:

$$A^+ = \int_{\delta_0}^{\delta_1} (P_m - P_e^{df}) d\delta = \int_{\delta_0}^{\delta_1} 0.8 d\delta = 0.8(\delta_1 - \delta_0)$$

De la integración de la ecuación dinámica, dado que el instante de reconexión del generador es el mismo que en el caso anterior (0.37 segundos después del fallo) se deduce la siguiente relación:

$$\delta_1 - \delta_0 = \frac{1}{2} \ddot{\delta} t^2 (P_m - P_e^{df}) = \frac{\pi f}{2H} t^2 \cdot 0.8 = 1.72 = K$$

que llevada a la ecuación inmediatamente anterior a esta última, nos define un área aceleradora $A^+ = 1.376$. Obsérvese que, a pesar de que δ_0 tiene un valor distinto, aún por encontrar, el área aceleradora coincide con la del primer apartado.

Por otra parte, la curva posterior al fallo sigue la expresión:

$$P_e^{pf} = \frac{E' V_3}{\left(0.25 + \frac{0.15 \cdot X}{0.15 + X}\right)} \sin \delta = \frac{1.126}{X_T} \sin \delta$$

siendo X la reactancia de la línea L2 que se desea determinar.

Si se mantiene el área aceleradora del primer caso y se desea que el sistema sea estable para al menos un tiempo crítico de 0.37 s, esto implica que se ha de aumentar el área desaceleradora, y, por tanto, tener una reactancia total X_T menor que la total del caso anterior (0.4), para obtener así una curva de potencia con un máximo más elevado. Matemáticamente esto se traduce en la igualdad de áreas aceleradoras y desaceleradoras. El área desaceleradora queda como:

$$A^- = \int_{\delta_1}^{\delta_2} (P_e^{pf} - P_m) d\delta = \int_{\delta_1}^{\pi - \delta_0} \left(\frac{1.126}{X_T} \sin \delta - 0.8 \right) d\delta =$$

$$= \left[-\frac{1.126}{X_T} \cos \delta - 0.8\delta \right]_{K + \delta_0}^{\pi - \delta_0}$$

donde son incógnitas X_T y δ_0 .

De la igualdad de las áreas, $A^+ = A^-$, y poniendo el ángulo δ_0 en función de X_T a partir de las condiciones iniciales previas al fallo, esto es,

$$\frac{E' V_3}{X_T} \sin \delta_0 = P_m \implies \frac{1.126}{X_T} \sin \delta_0 = 0.8$$

se obtiene la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{1.126}{X_T} \sqrt{1 - \left(\frac{0.8}{1.126} X_T\right)^2} (1 + \cos K) - 0.8 \operatorname{sen} K - 0.8\pi + 1.6 \operatorname{arcsen} \left(\frac{0.8}{1.126} X_T\right) = 0$$

Resolviendo iterativamente se obtiene:

$$X_T = 0.318 \implies X = 0.123$$

es decir, el valor máximo para la reactancia X de la línea L2, en aras a garantizar la estabilidad para un tiempo crítico de reconexión de 0.37 s, es de 0.123 p.u.

- 14.4.** En la red de la Figura 14.13 y con los parámetros mostrados en la Tabla 14.4, se conocen las tensiones de los embarrados 3 (nudo de potencia infinita) y 2:

$$u_3 = 1.0 + 0.0j$$

$$u_2 = 1.01 + 0.2j$$

siendo la potencia demandada por la carga local conectada en el nudo 2 de $1 + 0.4j$.

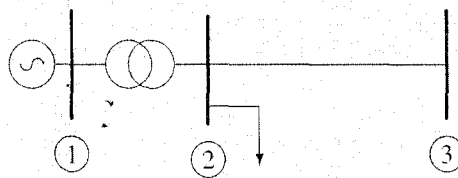


Figura 14.13 Esquema eléctrico inicial para el Problema 14.4.

Se pide:

1. Demostrar que el sistema es inestable si se desconecta instantáneamente toda la carga de la barra 2, quedando el trafo y la línea conectados.
2. Si en la situación de partida se desconecta permanentemente la línea, ¿es estable el sistema?

Elemento	Parámetros asociados
Generador	$X_d' = 0.35$
Transformador	$X_{cc} = 0.15$
Línea	$X_L = 0.4$

Tabla 14.4 Datos de la red del Problema 14.4.

Resolución

El esquema unifilar previo a la perturbación corresponde al de la Figura 14.14.

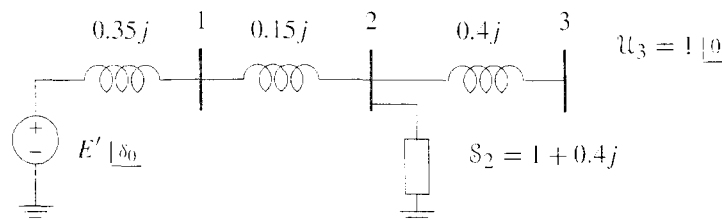


Figura 14.14 Esquema previo al fallo para el Problema 14.4.

Con las tensiones de los nudos 2 y 3 es posible determinar la intensidad por la línea \mathcal{J}_L

$$\mathcal{J}_L = \frac{(\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_3)}{X_L j} = 0.5 - 0.025j = 0.501 \angle -2.862$$

y la intensidad que demanda la carga en 2:

$$\mathcal{J}_2 = \left(\frac{\mathcal{S}_2}{\mathcal{U}_2} \right)^* = 1.046 \angle -10.601$$

Así, la intensidad por el transformador corresponde a la suma de las anteriores:

$$\mathcal{J}_T = \mathcal{J}_L + \mathcal{J}_2 = 1.544 \angle -8.098$$

Finalmente, se determina la tensión interna del generador

$$E' \angle \delta_0 = \mathcal{U}_2 + (X_{cc} + X'_d) j \mathcal{J}_T = 1.477 \angle 40.755$$

y la potencia eléctrica suministrada:

$$P_e = P_m = \Re(E' \angle \delta_0 \cdot \mathcal{J}_T^*) = 1.5$$

Primera cuestión. En esta situación, al desconectar repentinamente la carga conectada al nudo 2, la curva de ángulo-potencia eléctrica asociada vale:

$$P_e^{df} = \frac{E' V_3}{(X_{cc} + X'_d + X_L)} \sin \delta = 1.641 \sin \delta$$

Si siguiendo como en ejemplos anteriores el criterio de las áreas, para que el sistema fuera estable se habría de cumplir que el área aceleradora no superase al área desaceleradora máxima (ver Figura 14.15).

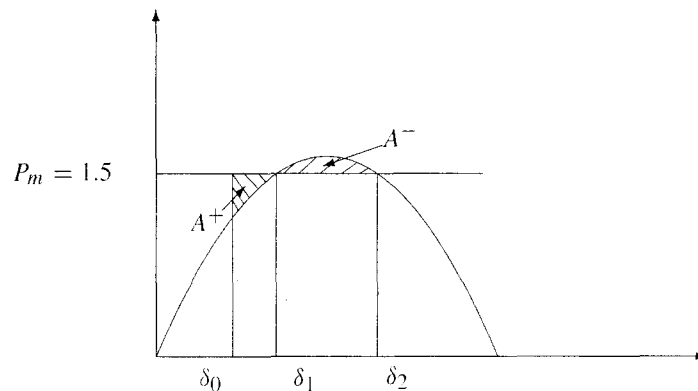


Figura 14.15 Curva de potencia-ángulo tras la pérdida de carga en el Problema 14.4

Estas áreas valen:

$$A^+ = \int_{\delta_0}^{\delta_1} (P_m - 1.641 \sin \delta) d\delta$$

$$A^- = \int_{\delta_1}^{\delta_2} (1.641 \sin \delta - P_m) d\delta$$

con $\delta_1 = \arcsin(P_m/1.641) = 1.153$ rad, y $\delta_2 = \pi - \delta_1 = 1.988$ rad.

Tras sustituir valores en estas ecuaciones se deduce que las protecciones del generador, para evitar la aceleración incontrolada del mismo, dispararían, ya que el área aceleradora, $A^+ = 0.085$, supera a la desaceleradora máxima, $A^- = 0.078$.

Segunda cuestión. Se parte de nuevo de la situación inicial, y, como es habitual para este tipo de estudios, se supone, para el período de falta, un modelo de admitancia constante para la carga. Así, la carga en 2 viene definida por una impedancia que se obtiene con las condiciones sobre la misma previas al fallo:

$$Z_2 = \left(\frac{V_2^2}{S_2} \right)^* = \frac{(1.01^2 + 0.2^2)}{(1 - 0.4j)} = 0.913879 + 0.36555j$$

El circuito equivalente desde que se produce la pérdida permanente de la línea se indica en la Figura 14.16. La intensidad que circula por el mismo vale:

$$I = \frac{E' \angle \delta}{(X_d'j + X_{cc}j + Z_2)} \Rightarrow I = 1.1734$$

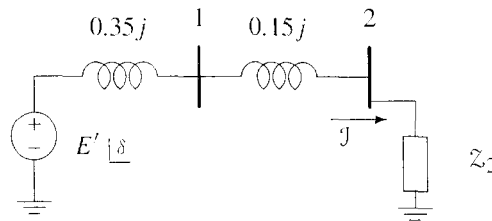


Figura 14.16 Modelo del sistema para el Problema 14.4. tras la pérdida de la línea

La única potencia activa demandada en el sistema corresponde a la consumida por la parte real de la impedancia que modela la carga en 2, y corresponde pues a la que suministra el generador. Su cuantía es de:

$$P_e^{df} = \Re(Z_2)I^2 = 1.258$$

De este valor se deduce fácilmente la inestabilidad del sistema, ya que la potencia mecánica del generador, $P_m = 1.5$, supera la eléctrica demandada, $P_e^{df} = 1.258$ (ésta permanece constante debido al modelo clásico adoptado para el generador y al modelo de admitancia constante para la carga), con lo que se produce un área aceleradora que crece indefinidamente. En la Figura 14.17 queda de manifiesto dicha situación.

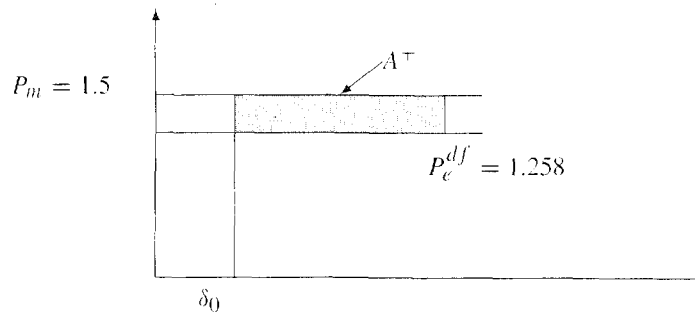


Figura 14.17 Diagramas de potencia-ángulo tras la pérdida de la línea en el Problema 14.4.

14.5. En la red de la Figura 14.18 y con los parámetros mostrados en la Tabla 14.5, el embarrado 5, de potencia de cortocircuito infinita y tensión 1 en p.u., consume una potencia $S_5 = 1 + 0.2j$ p.u.

Determinar:

1. Tensión interna del generador.
2. El ángulo crítico de eliminación de un fallo trifásico rígido en el embarrado 3, fallo que es eliminado mediante la actuación simultánea de los interruptores B1 y B2.

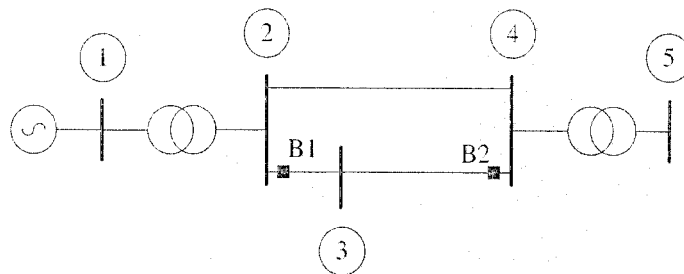


Figura 14.18 Esquema eléctrico inicial para el Problema 14.5.

Elemento	Parámetros asociados
Generador de rotor liso	$X'_d = X'_q = 0.15$,
Transformador 1-2	$X_{cc} = 0.05$
Transformador 4-5	$X_{cc} = 0.05$
Línea 2-4	$X_{L1} = 0.3$
Línea 2-3	$X_{L2} = 0.1$
Línea 3-4	$X_{L3} = 0.2$

Tabla 14.5 Datos de la red del Problema 14.5.

Resolución

Atendiendo a los datos asociados a cada elemento, el esquema unifilar previo al fallo corresponde al indicado en la Figura 14.19.

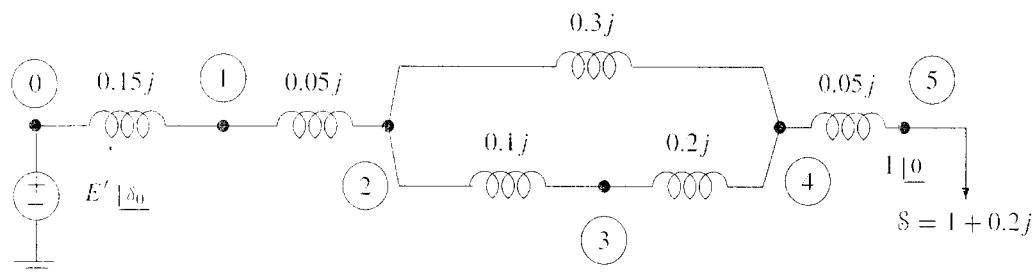


Figura 14.19 Esquema previo al fallo para el Problema 14.5.

La reactancia equivalente entre el nudo 0 y el embarrado 5 es:

$$X = X'_d + X_{cc} + \left(\frac{X_{L1}(X_{L2} + X_{L3})}{X_{L1} + X_{L2} + X_{L3}} \right) + X_{cc} = 0.4j$$

De la potencia compleja consumida en 5 y de la tensión de dicho nudo se deduce la tensión interna del generador así como el resto de las condiciones previas al fallo:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{E' V_5}{X} \text{sen}(\delta_0 - \theta_5) = \frac{E'}{0.4} \text{sen}(\delta_0 - 0) = 1 \\ Q &= \frac{E' \cdot V_5}{X} \cos(\delta_0 - \theta_5) - \frac{V_5^2}{X} = \frac{E'}{0.4} \cos(\delta_0 - 0) - \frac{1}{0.4} = 0.2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \delta_0 = 20.323^\circ \\ E' = 1.152 \end{cases}$$

Durante el cortocircuito se tiene el primer esquema de la Figura 14.20, donde se muestran además los distintos unifilares simplificados que se van obteniendo cuando se realizan conversiones estrella-triángulo. La primera equivalencia consiste en pasar la estrella constituida por los extremos 0, 4 y 3 a

un triángulo (desaparece el nudo 2), con lo que se obtiene el segundo esquema de la Figura 14.20, y la segunda transformación es pasar de nuevo a un triángulo la estrella formada por los nudos 0, 3 y 5 (desaparece el nudo 4), obteniéndose el último circuito monofásico de la Figura 14.20. En este último esquema se tiene una curva de potencia-ángulo dada por:

$$P_e^{df} = \frac{E' V_5}{1.525} \text{sen}(\delta - \theta_5) = 0.755 \text{sen } \delta$$

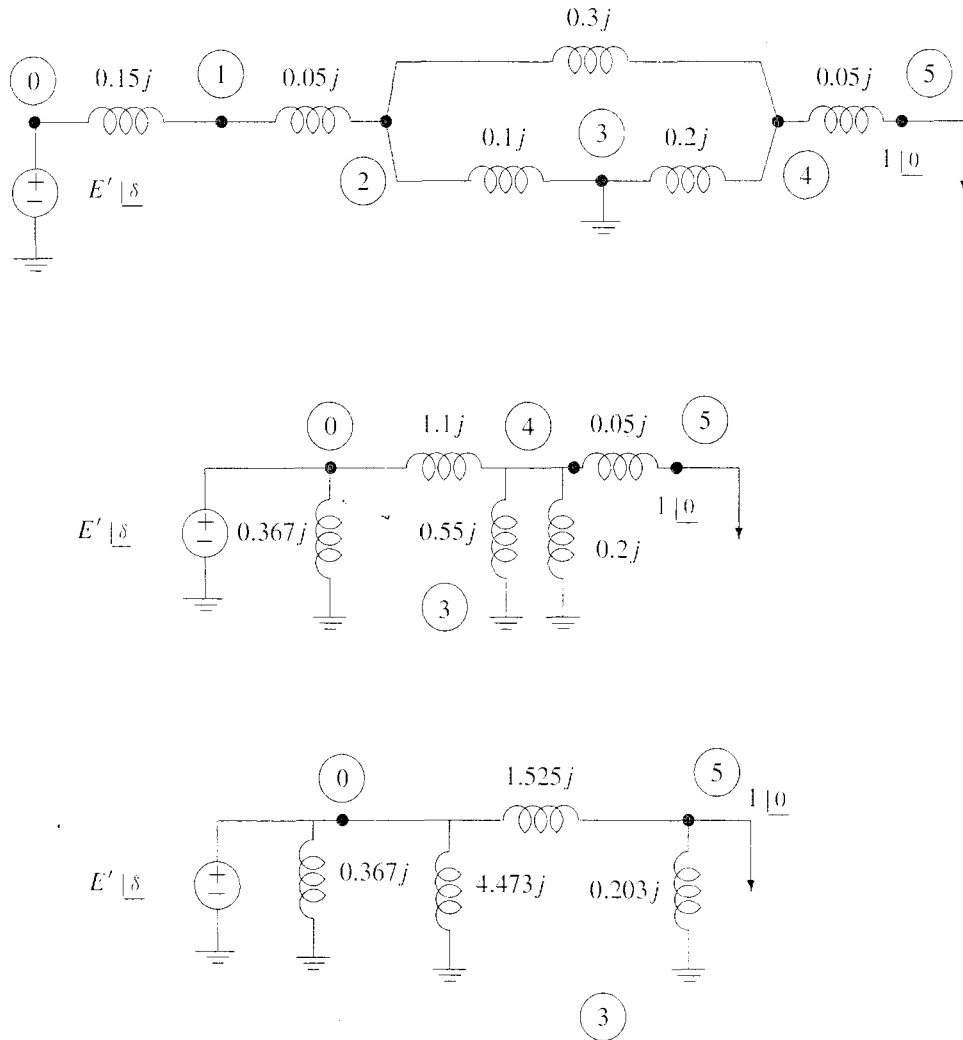


Figura 14.20 Esquema del fallo para el Problema 14.5 y reducción del circuito.

La curva de potencia-ángulo tras el despeje de la falta se determina del circuito monofásico correspondiente a este período y que se indica en la Figura 14.21. Así, resulta:

$$P_e^{pf} = \frac{E' V_5}{X'_d + X_{cc} + X_{L1} + X_{cc}} \text{sen}(\delta - \theta_5) = 2.095 \text{sen } \delta$$

Todas la curvas de potencia, las anteriores al fallo, durante la falta y la posterior al despeje de la misma se muestran en la Figura 14.22, donde se aplica de nuevo el criterio de las áreas para determinar el ángulo crítico de apertura de los interruptores.

Los ángulos δ_1 y δ_2 valen:

$$\delta_1 = \arcsen\left(\frac{P_m}{2.095}\right) = 0.498 \text{ rad}$$

$$\delta_2 = \pi - \delta_1 = 2.644 \text{ rad}$$

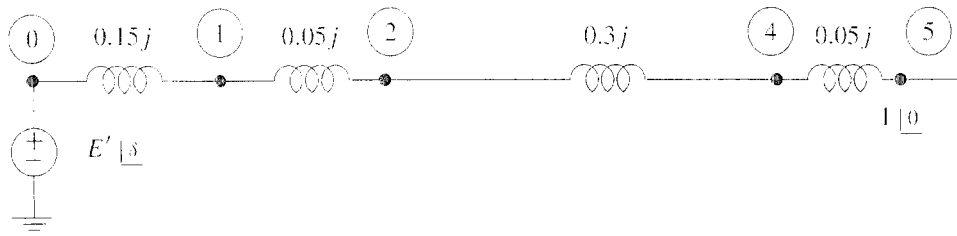


Figura 14.21 Esquema tras el despeje de la falta en el Problema 14.5.

El área aceleradora y desaceleradora vienen dadas por:

$$A^+ = \int_{\delta_0}^{\delta_c} (P_m - 0.755 \text{ sen } \delta) d\delta$$

$$A^- = \int_{\delta_c}^{\delta_2} (2.095 \text{ sen } \delta - P_m) d\delta$$

De la igualdad entre ambas se obtiene un ángulo crítico de valor 1.766 rad, equivalentes a 101.19°. La obtención del tiempo crítico requeriría en este caso la integración numérica de la ecuación de oscilación, al no ser la aceleración constante.

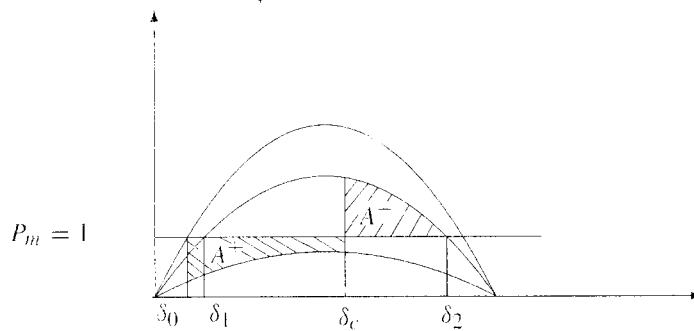


Figura 14.22 Curvas de potencia-ángulo para las distintas etapas del Problema 14.5.

- 14.6. En el sistema de la Figura 14.23 y con los parámetros mostrados en la Tabla 14.6, se produce un fallo en la línea L3, cerca del nudo 3, que se despeja en 0.1 segundos abriendo las protecciones de dicha línea.

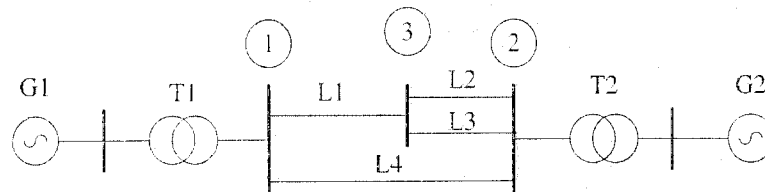


Figura 14.23 Esquema unifilar del Problema 14.6.

Tomando una potencia base de 100 MVA y conociendo el estado de la red previo al fallo, Tabla 14.7, determinar numéricamente la evolución de los ángulos de los rotores de los generadores.

Nota: modelar las cargas como impedancias constantes.

Elemento	Parámetros asociados
Generador 1	$X_d = 0.28$ p.u., $S = 50$ MVA, $H = 5$ p.u.
Generador 2	$X_d = 0.25$ p.u., $S = 120$ MVA, $H = 4$ p.u.
Transformador 1	$X_{cc} = 0.08$ p.u., $S = 50$ MVA
Transformador 2	$X_{cc} = 0.07$ p.u., $S = 120$ MVA
Línea L1	$X_{L1} = 0.08$ ($S_B = 100$ MVA)
Línea L2	$X_{L2} = 0.06$ ($S_B = 100$ MVA)
Línea L3	$X_{L3} = 0.06$ ($S_B = 100$ MVA)
Línea L4	$X_{L4} = 0.13$ ($S_B = 100$ MVA)

Tabla 14.6 Datos de la red del Problema 14.6.

Nudo	Tensión (p.u.)	Ángulo (Grados)	Potencia S_C consumida (MVA)	Potencia S_G generada (MVA)
1	1.03	0	0 + 0j	30 + 23.1j
2	1.02	-0.5	80 + 40j	100 + 37.8j
3	1.018	-1.0	50 + 20j	0 + 0j

Tabla 14.7 Estado de la red del Problema 14.6 previo al fallo.

Resolución

Pasando el sistema a p.u. en la base de potencias indicada, se obtiene el esquema unifilar mostrado en la Figura 14.24. En él se han modelado las cargas como admitancias constantes de valor:

$$y_{C2} = \left(\frac{S_{C2}}{V_2^2} \right)^* = 0.768 - 0.384j$$

$$y_{C3} = \left(\frac{S_{C3}}{V_3^2} \right)^* = 0.482 - 0.193j$$

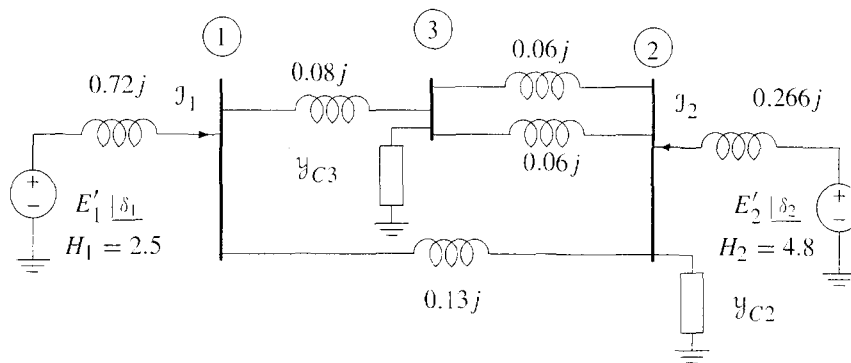


Figura 14.24 Esquema unifilar del Problema 14.6 previo al fallo.

De las condiciones iniciales se determina el estado inicial de los generadores, fuerza electromotriz tras la reactancia transitoria y ángulo inicial:

$$E'_1 |_{\underline{\delta}_1} = u_1 + (X_{G1} + X_{T1})j \left(\frac{S_{G1}}{u_1} \right)^* = 1.03 |0 + (0.72j)(0.291 - 0.233j) = 1.209 |9.95$$

$$E'_2 |_{\underline{\delta}_2} = u_2 + (X_{G2} + X_{T2})j \left(\frac{S_{G2}}{u_2} \right)^* = 1.02 |-0.5 + (0.266j)(1.048 |-21.2) = 1.152 |13.45$$

Las potencias mecánicas en cada generador coinciden en régimen permanente con las eléctricas suministradas por los mismos:

$$P_{m1} = 0.3 \quad P_{m2} = 1$$

Transformando las fuentes de tensión en fuentes de intensidad, el esquema de red previo al fallo es el mostrado en la Figura 14.25. La matriz de admitancias que lo representa resulta:

$$[Y_{df}] = \begin{bmatrix} -21.58j & 7.69j & 12.5j \\ 7.69j & 0.769 - 45.15j & 33.32j \\ 12.5j & 33.32j & 0.482 - 46.026j \end{bmatrix}$$

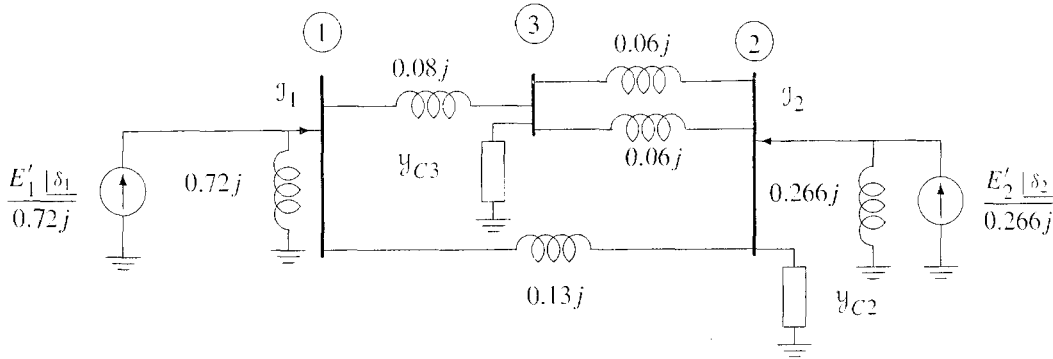


Figura 14.25 Esquema unifilar del Problema 14.6 previo al fallo usando fuentes de intensidad.

Cuando se produce la falta, la tensión del nudo 3 se hace cero con lo que la matriz de admitancias del sistema resulta:

$$[Y_{df}] = \begin{bmatrix} -21.58j & 7.69j & 12.5j \\ 7.69j & 0.769 - 45.15j & 33.32j \\ 12.5j & 33.32j & Y_{\infty} \end{bmatrix}$$

donde Y_{∞} representa una impedancia nula a tierra.

El término Y_{∞} que aparece en la matriz no se tiene en cuenta, puesto que la tensión del nudo 3 es nula

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_{cc} \end{bmatrix} = [Y_{df}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con lo que realmente se utilizaría el sistema de dos por dos:

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = [Y_{df}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, tras despejar la falta mediante la actuación de las protecciones, que en este caso se traduce en la apertura de la línea L3, resulta la matriz de admitancias:

$$[Y_{pf}] = \begin{bmatrix} -21.58j & 7.69j & 12.5j \\ 7.69j & 0.769 - 28.5j & 16.66j \\ 12.5j & 16.66j & 0.482 - 29.35j \end{bmatrix}$$

Considerando invariantes las potencias mecánicas y las tensiones internas que representan a los generadores, el sistema de ecuaciones y el proceso iterativo para resolverlas sería:

1. Obtener las intensidades inyectadas en los nudos utilizando la matriz de admitancias adecuada que modela el sistema según el instante de tiempo de integración.

$$[J] = [Y][U] \tag{14.10}$$

2. Determinar las potencias eléctricas suministradas por cada generador.

$$P_{e1} = \Re(\mathcal{E}'_1 \mathcal{J}_1)^* = \Re(1.209 \underline{\delta}_1 \cdot \mathcal{J}_1)^*$$

$$P_{e2} = \Re(\mathcal{E}'_2 \mathcal{J}_2)^* = \Re(1.152 \underline{\delta}_2 \cdot \mathcal{J}_2)^*$$

3. Resolver las ecuaciones dinámicas de cada generador.

$$\ddot{\delta}_1 = \frac{f\pi}{H_1}(P_{m1} - P_{e1}) = \frac{50 \cdot \pi}{2.5}(0.3 - P_{e1})$$

$$\ddot{\delta}_2 = \frac{f\pi}{H_2}(P_{m2} - P_{e2}) = \frac{50 \cdot \pi}{4.8}(1 - P_{e2})$$

4. Incrementar el intervalo de integración, $t^v = t^{v-1} + \Delta t$, e ir al paso 1.

Comenzamos aplicando el algoritmo con las condiciones iniciales $\delta_1^0 = 0.174$, $\delta_2^0 = 0.221$ rad y $\dot{\delta}_1^0 = 0$, $\dot{\delta}_2^0 = 0$. Se considera que el instante $t=0$ es aquel en el que se produce el fallo y se toma un paso de integración $\Delta t = 0.01$ s.

Primera Iteración:

1. Utilizando la matriz de admitancias que caracteriza el sistema durante el fallo, \mathcal{Y}_{df} , resultan las intensidades y tensiones:

$$\mathcal{J}_1^1 = 0.261 - 1.492j \quad \mathcal{J}_2^1 = 0.859 - 3.779j$$

$$\mathcal{U}_1^1 = 0.117 + 0.022j \quad \mathcal{U}_2^1 = 0.113 + 0.023j$$

2. Las potencias eléctricas suministradas por cada generador, aplicando las Ecuaciones (14.11) son:

$$P_{e1}^1 = -1.579 \cdot 10^{-3} \quad P_{e2}^1 = 0.012$$

3. Se procede ahora a integrar las ecuaciones dinámicas (14.11), para lo cual se aplica en este caso el método de Euler y las condiciones iniciales indicadas anteriormente, obteniéndose para el generador 1:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta}_1^1 &= \frac{50 \cdot \pi}{2.5}(0.3 + 1.579 \cdot 10^{-3}) = 18.95 \\ \dot{\delta}_1^1 &= 18.95 \cdot \Delta t + \dot{\delta}_1^0 = 0.189 \\ \delta_1^1 &= 0.189\Delta t + \delta_1^0 = 0.175 \end{aligned} \right\}$$

y para el generador 2

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta}_2^1 &= \frac{50 \cdot \pi}{4.8}(1 - 0.012) = 32.33 \\ \dot{\delta}_2^1 &= 32.33 \cdot \Delta t + \dot{\delta}_2^0 = 0.323 \\ \delta_2^1 &= 0.323\Delta t + \delta_2^0 = 0.222 \end{aligned} \right\}$$

4. Finalmente se pasa a la segunda iteración, $t^2 = t^1 + \Delta t = 0.02$, volviendo de nuevo al paso 1.

Segunda Iteración:

1. Puesto que aún no se ha alcanzado el instante de despeje de la falta ($t=0.1$ s) se continúa utilizando la misma matriz de admitancias durante el fallo, \mathcal{Y}_{df} , resultando para esta segunda iteración las intensidades y tensiones:

$$\mathcal{J}_1^2 = 0.263 - 1.492j \quad \mathcal{J}_2^2 = 0.865 - 3.777j$$

$$\mathcal{U}_1^2 = 0.117 + 0.022j \quad \mathcal{U}_2^2 = 0.113 + 0.023j$$

2. Con los nuevos valores de los ángulos e impedancias, las potencias eléctricas suministradas por cada generador valen ahora:

$$P_{e1}^2 = -1.619 \cdot 10^{-3} \quad P_{e2}^2 = 0.012$$

3. De la integración de las ecuaciones dinámicas resulta:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta}_1^2 &= \frac{50 \cdot \pi}{2.5} (0.3 + 1.619 \cdot 10^{-3}) = 18.95 \\ \dot{\delta}_1^2 &= 18.95 \cdot \Delta t + \dot{\delta}_1^1 = 0.379 \\ \delta_1^2 &= 0.379 \Delta t + \delta_1^1 = 0.178 \end{aligned} \right\}$$

y para el generador 2

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta}_2^2 &= \frac{50 \cdot \pi}{4.8} (1 - 0.012) = 32.33 \\ \dot{\delta}_2^2 &= 32.33 \cdot \Delta t + \dot{\delta}_2^1 = 0.647 \\ \delta_2^2 &= 0.647 \Delta t + \delta_2^1 = 0.227 \end{aligned} \right\}$$

4. Se incrementa el tiempo de integración, $t^3 = t^2 + \Delta t = 0.03$ y comenzaríamos la tercera iteración. Siguiendo este proceso, se llega al instante $t=0.1$ s, correspondiendo a la décima iteración, con los valores:

$$\begin{aligned} \delta_1^{10} &= 0.269 & \dot{\delta}_1^{10} &= 1.902 \\ \delta_2^{10} &= 0.382 & \dot{\delta}_2^{10} &= 3.23 \end{aligned}$$

En este instante se produce el despeje de la falta, con lo que el primer paso de la siguiente iteración ha de utilizar la nueva matriz de admitancias Y_{pf} .

Tras completar la iteración 11, de forma análoga a como se ha hecho anteriormente, resulta:

$$\begin{aligned} \delta_1^{11} &= 0.288 & \dot{\delta}_1^{11} &= 1.948 \\ \delta_2^{11} &= 0.415 & \dot{\delta}_2^{11} &= 3.207 \end{aligned}$$

En las Figuras 14.26 y 14.27 se muestran la evolución temporal de los ángulos y velocidades de los generadores del sistema. Debido a que no se ha tenido en cuenta ningún factor de amortiguamiento el resultado es una oscilación permanente de los generadores; realmente ésta acabaría anulándose debido a los pares amortiguadores que en realidad existen.

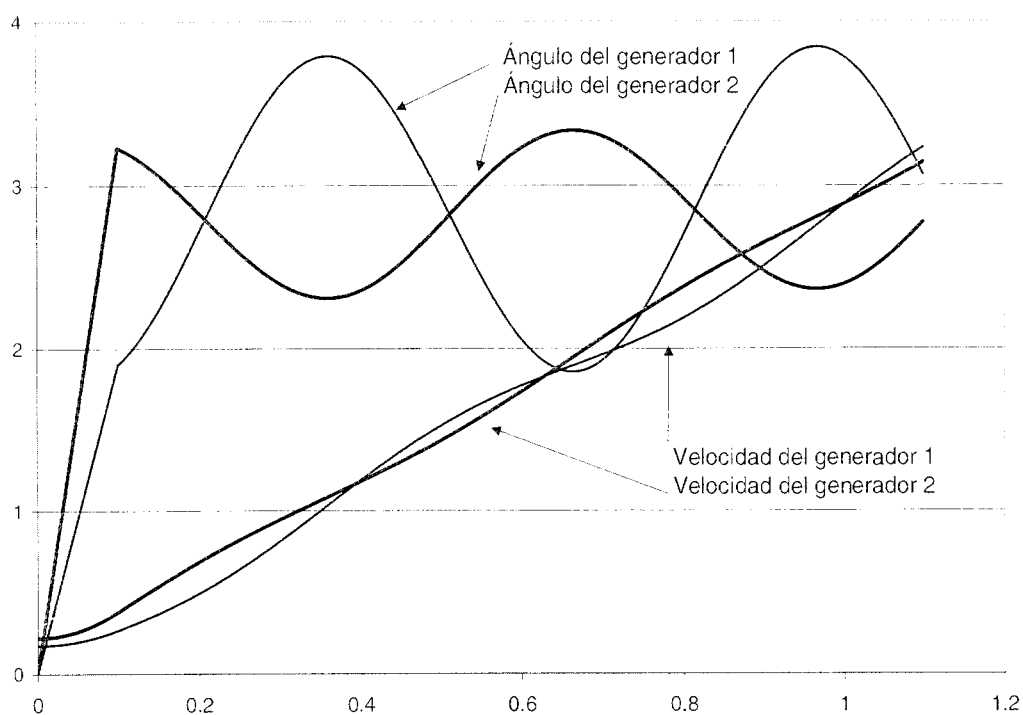


Figura 14.26 Evolución de los ángulos y velocidades de los generadores del Problema 14.6.

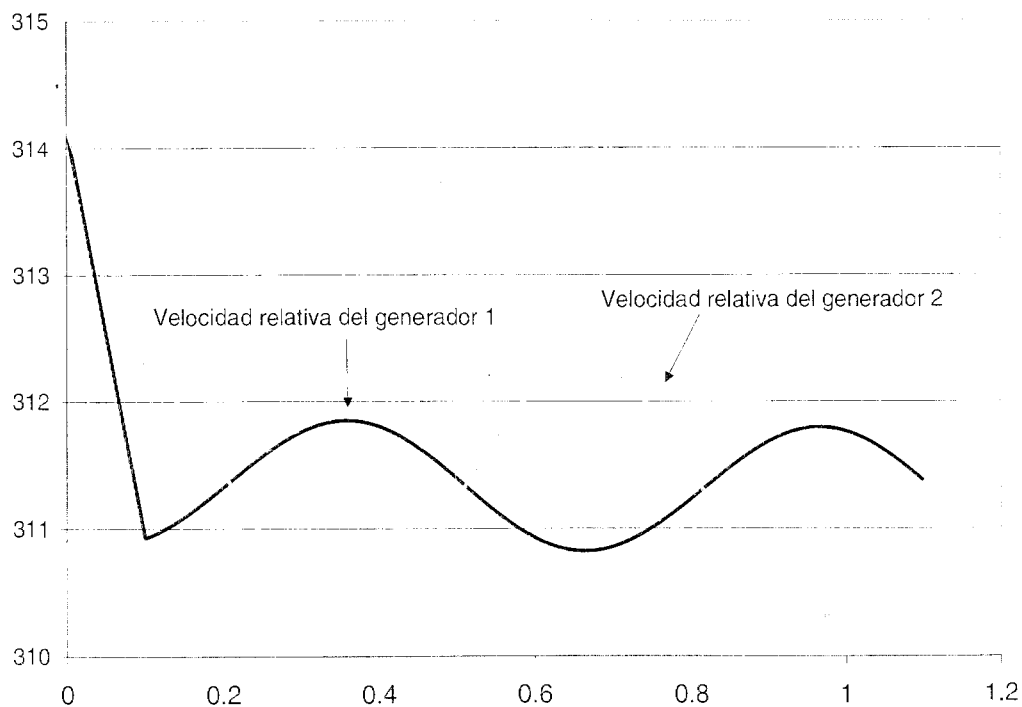


Figura 14.27 Evolución de las velocidades, relativas a la de sincronismo, de los generadores del Problema 14.6.

BIBLIOGRAFÍA

1. Arrillaga J., Watson N.R., *Computer Modelling of Electrical Power Systems*, John Wiley & Sons, 2001.
2. Bergen A., Vittal V., *Power Systems Analysis*, Prentice Hall, 2000, segunda edición.
3. Das J.C., *Power System Analysis. Short-Circuit Load Flow and Harmonics*, Marcel Dekker, 2002.
4. Debs A.S., *Modern Power Systems Control and Operation*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
5. Dhar R.N., *Computer-Aided Power System Operation & Analysis*, Tata McGraw-Hill, 1982.
6. Elgerd O.I., *Electric Energy Systems Theory. An Introduction*, McGraw-Hill, 1983.
7. El-Hawary M.E., *Electrical Power Systems. Design and Analysis*, IEEE Press, 1995.
8. Glover J., Sarma M., *Power System Analysis and Design*, Thomson learning, 2002, tercera edición.
9. Gómez Expósito A. (Coordinador), *Análisis y Operación de Sistemas de Energía Eléctrica*, McGraw- Hill, 2002.
10. Gönen T., *Modern Power System Analysis*, John Wiley & Sons, 1988.
11. Grainger J.J., Stevenson W.D., *Análisis de Sistemas de Potencia*, McGraw-Hill, 1996.
12. Gross C.A., *Power System Analysis*, John Wiley & Sons, 1979.
13. Heydt G.T., *Computer Analysis Methods for Power Systems*, McMillan Publishers, 1986.
14. Kusic G., *Computer-Aided Power Systems Analysis*, Prentice Hall, 1986.
15. Nagrath I.J., Kothari D.P., *Modern Power System Analysis*, Tata McGraw-Hill, 1982.
16. Natarajan R., *Computer-Aided Power System Analysis*, Marcel Dekker Inc., 2002.
17. Pai M.A., *Computer Techniques in Power System Analysis*, Tata McGraw-Hill, 1980.
18. Saccomanno F., *Electric Power Systems: Analysis and Control*, John Willey & Sons, 2002.
19. Stevenson W.D., *Elements of Power System Analysis*, McGraw-Hill, 1982.
20. Toro V., *Electric Power Systems*, Prentice Hall, 1992.
21. Weedy B.M., *Electric Power Systems*, John Willey & Sons, 1998, cuarta edición.
22. Wood A., Wollenberg B., *Power Generation Operation & Control*, John Wiley & Sons, 1996, segunda edición.

ÍNDICE DE MATERIAS

A

aceleración, factor de, 57
admitancias de nodos, matriz de, 55
ajustes del flujo de cargas, 59
ángulo crítico de apertura, 265
apertura, ángulo crítico de, 265
área, error de control de, 87
áreas,
 criterio de igualdad de, 264
 intercambio entre, 60
arranques y paradas, programación de, 165
asimétricas,
 cálculo de corrientes de faltas, 210, 225
 faltas, 223
autotransformador, 29

B

banco de condensadores y reactancia, 87
base,
 cambio de, 4
 magnitudes, 3
bombeo, centrales de, 168

C

caída de tensión, 44
cálculo de corrientes de faltas asimétricas, 210, 225
cambio de base, 4
capacidad
 del transporte
 con regulación de tensión, 46
 con regulación intermedia, 46
 sin regulación de tensión, 45
 estática de transporte, 44
característicos del generador, parámetros, 15
cargas,
 ajustes del flujo de, 59

 ecuaciones del flujo de, 56
 en continua, flujo de, 59, 141, 190
 flujo de, 55, 189
 flujo óptimo de, 189
centrales
 de bombeo, 168
 hidráulicas, 167
circuito equivalente del generador, 15
clásico, despacho económico, 161
cociente R/X , 43
commitment, unit, 165
compensación
 serie, 48
 Teorema de, 210, 211
compleja, potencia, 55
componente de continua, 209
componentes
 de la corriente de falta, 209
 simétricas, 223
concentrados, parámetros, 43
condensadores y reactancia, banco de, 87
constante de propagación, 41
contingencias, 141
continua,
 componente de, 209
 flujo de cargas en, 59, 141, 190
control
 de área, error de, 87
 de frecuencia, 85
 de tensiones, 97
 actuaciones, 99
 estructura, 98
coordinación hidrotérmica, 166
corriente de falta, componentes de la, 209
corrientes de falta asimétricas, 210, 225
cortocircuito,
 ensayo en, 25

intensidad de, 209
 potencia de, 211
 coste incremental, 162
 covarianzas, matriz de, 124, 126
 criterio de igualdad de áreas, 264
 crítico de apertura, ángulo, 265
 cuadrados ponderados, estimador de mínimos, 124

D

desacoplado rápido, método, 58, 59, 141
 desfasador, transformador, 30
 despacho económico, 190
 clásico, 161
 devanado terciario, 28
 devanados, transformador de tres, 28
 directa, impedancia, 224
 distribución
 factores de, 142
 normal, 124
 distribuidos, parámetros, 41
 dominio de secuencias, impedancia en el, 224

E

ecuación de oscilación del generador, 265
 ecuaciones
 del flujo de cargas, 56
 normales, 124
 efecto Ferranti, 42, 46
 eléctrico, estados del sistema, 141
 ensayo
 en cortocircuito, 25
 en vacío, 25
 entre áreas, intercambio, 60
 equivalente
 del generador, circuito, 15
 impedancia, 210
 impedancia, 211
 error de control de área, 87
 errores no gaussianos, 125
 estabilidad transitoria, 263
 estado,
 estimación de, 123
 vector de, 123
 estados del sistema eléctrico, 141
 estática de transporte, capacidad, 44
 estimación
 de estado, 123
 de máxima verosimilitud, 124
 estimador
 con restricciones de igualdad, 125
 de mínimos cuadrados ponderados, 124

F

factor de aceleración, 57
 factores de distribución, 142
 falta
 componentes de la corriente de, 209
 fase-fase, 227

fase-fase-tierra, 227
 fase-tierra, 226
 franca, 210
 faltas
 asimétricas, 223
 asimétricas, cálculo de corrientes de, 210
 simétricas, 209
 fase-fase, falta, 227
 fase-fase-tierra, falta, 227
 fase-tierra, falta, 226
 Ferranti, efecto, 42, 46
 flow, optimal power, 189
 flujo
 de cargas, 55, 189
 de cargas, ajustes del, 59
 de cargas, ecuaciones del, 56
 de cargas en continua, 59, 141, 190
 homopolar, 224
 óptimo de cargas, 189
 con restricciones de seguridad, 191
 flujo-inyecciones, sensibilidad, 143, 190
 Fortescue, matriz de, 223
 franca, falta, 210
 frecuencia
 control de, 85
 sensibilidad respecto a la, 86
 funcionamiento del generador, límites de, 16

G

ganancia, matriz de, 125
 gaussianos, errores no, 125
 Gauss-Seidel, método de, 57
 generador,
 circuito equivalente del, 15
 de polos salientes, 14
 de rotor liso, 14
 ecuación de oscilación del, 265
 límites de funcionamiento del, 16
 parámetros característicos del, 15
 síncrono, 13, 86, 263

H

hidráulicas, centrales, 167
 hidrotérmica, coordinación, 166
 homopolar
 flujo, 224
 impedancia, 224

I

igualdad
 de áreas, criterio de, 264
 estimador con restricciones de, 125
 impedancia,
 directa, 224
 en el dominio de secuencias, 224
 equivalente, 210
 equivalente, 211
 homopolar, 224

inversa, 224
 natural, 41
 impedancias modales, matriz de, 210
 incremental, coste, 162
 incremental, red, 210
 incrementales, pérdidas, 163
 intensidad de cortocircuito, 209
 intercambio entre áreas, 60
 interconexión de redes de secuencia, 226
 inversa, impedancia, 224

J

Jacobiano, 58, 124
 Joule, pérdidas, 44

L

límites
 de funcionamiento del generador, 16
 de reactiva, 59
 línea
 pérdidas Joule en la, 44
 sin pérdida, 42
 líneas,
 modelo en π de, 41
 modelos en secuencias de, 224
 parámetros de, 41
 potencia en, 43
 liso, generador de rotor, 14

M

magnitudes base, 3
 matriz
 B' , 58
 B'' , 58, 60
 de admitancias de nodos, 55
 de covarianzas, 124, 126
 de Fortescue, 223
 de ganancia, 125
 de impedancias modales, 210
 máxima verosimilitud, estimación de, 124
 mayor residuo normalizado, test del, 126
 medidas, vector de, 123
 método
 de Gauss-Seidel, 57
 de Newton-Raphson, 57, 59, 124
 desacoplado rápido, 58, 59, 141
 mínimos cuadrados ponderados, estimador de, 124
 modales, matriz de impedancias, 210
 modelo en π
 de líneas, 41
 del transformador, 27
 modelos
 en secuencias, 224
 en secuencias de líneas, 224
 en secuencias de transformadores, 224
 monofásico, transformador, 25

N

natural
 impedancia, 41
 potencia, 42
 Newton-Raphson, método de, 57, 59, 124
 nodos, matriz de admitancias de, 55
 no gaussianos, errores, 125
 normal,
 distribución, 124
 sistema, 27
 normales, ecuaciones, 124
 normalizado, test del mayor residuo, 126
 normalizados, residuos, 126
 nudo PQ , 56, 59
 nudo PV , 56, 57, 59
 nudos de tránsito, 125
 nudo slack, 56

O

optimal power flow, 189
 óptimo de cargas,
 con restricciones de seguridad, flujo, 191
 flujo, 189
 oscilación del generador, ecuación de, 265

P

paradas, programación de arranques y, 165
 parámetros
 característicos del generador, 15
 concentrados, 43
 de líneas, 41
 distribuidos, 41
 pérdida, línea sin, 42
 pérdidas
 en el transporte, 163
 incrementales, 163
 Joule en la línea, 44
 perfil plano, 57, 125
 período
 subtransitorio, 209
 transitorio, 209
 π , modelo en,
 de líneas, 41
 del transformador, 27
 plano, perfil, 57, 125
 polos salientes, generador de, 14
 ponderados, estimador de mínimos cuadrados, 124
 por unidad, sistema, 3
 potencia
 compleja, 55
 de cortocircuito, 211
 en líneas, 43
 natural, 42
 power flow, optimal, 189
 PQ , nudo, 56, 59
 programación de arranques y paradas, 165
 propagación, constante de, 41
 p.u., ventajas del sistema, 4

PV, nudo, 56, 57, 59

R

rápido, método desacoplado, 58, 59, 141
 reactancia, banco de condensadores y, 87
 reactiva, límites de, 59
 red incremental, 210
 redes de secuencia, 225
 interconexión de, 226
 regulación
 de tensión, 44, 45, 46
 intermedia, 46
 regulador de velocidad, 87
 reguladores, transformadores, 29, 60
 relación de transformación, 25, 26
 reserva rodante, 165
 residuo normalizado, test del mayor, 126
 residuos
 normalizados, 126
 vector de, 58, 124
 resonancia subsíncrona, 48
 restricciones de seguridad, flujo óptimo de cargas con,
 191
 rodante, reserva, 165
 rotor liso, generador de, 14
 R/X , cociente, 43

S

salientes, generador de polos, 14
 SCADA, 123
 secuencia, interconexión de redes de, 226
 secuencias,
 modelos en, 224
 redes de, 225
 seguridad, restricciones de, 191
 sensibilidad
 flujo-inyecciones, 143, 190
 respecto a la frecuencia, 86
 $V-Q$, 60, 99
 serie, compensación, 48
 servicio, tensión de, 44
 simétricas
 componentes, 223
 faltas, 209
 síncrono, generador, 13, 86, 263
 sistema
 eléctrico, estados del, 141
 normal, 27
 por unidad, 3
 p.u., ventajas del, 4
 slack, nudo, 56
 subsíncrona, resonancia, 48
 subtransitorio, período, 209

T

tensión
 caída de, 44
 capacidad del transporte, 45, 46

 de servicio, 44
 regulación de, 44
 tensiones, control de, 97
 Teorema de compensación, 210, 211
 terciario, devanado, 28
 test del mayor residuo normalizado, 126
 tomas, transformador con, 29, 60, 97
 transformación, relación de, 25, 26
 transformador
 con tomas, 29, 60, 97
 desfasador, 30
 de tres devanados, 28
 modelo en π del, 27
 monofásico, 25
 trifásico, 26
 transformadores
 modelos en secuencias de, 224
 reguladores, 29, 60
 tránsito, nudos de, 125
 transitoria, estabilidad, 263
 transitorio, período, 209
 transporte,
 capacidad estática de, 44
 regulación, 45, 46
 pérdidas en el, 163
 tres devanados, transformador de, 28
 trifásico, transformador, 26

U

unidad, sistema por, 3
 unit commitment, 165

V

vacío, ensayo en, 25
 vector
 de estado, 123
 de medidas, 123
 de residuos, 58, 124
 velocidad, regulador de, 87
 ventajas del sistema p.u., 4
 verosimilitud, estimación de máxima, 124
 $V-Q$, sensibilidad, 60, 99

3/98.0
550

Sistemas Eléctricos de Potencia

Problemas y ejercicios resueltos

Este libro de la colección PRENTICE PRACTICA abordará los principales temas involucrados en el análisis, operación y control de los sistemas eléctricos de potencia, incluyendo estudios de faltas y estabilidad.

Por necesidades pedagógicas, la mayoría de problemas se refieren a pequeños sistemas de dos o tres embarrados. No obstante, se incluyen ejercicios relativos a redes mayores, y se hace explícitamente referencia en el texto a la problemática que presenta la resolución de sistemas de gran dimensión.

Cada uno de los capítulos consta de:

- Introducciones al principio de cada capítulo, con los conceptos y ecuaciones necesarios para entender y resolver los ejercicios que se plantean.
- Problemas resueltos en detalle de dificultad progresiva.

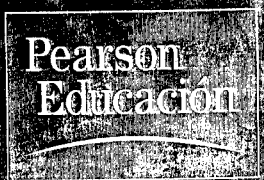


www.prenticepractica.com

PRENTICE PRACTICA es una colección de libros, cuyo texto es eminentemente práctico. La finalidad de esta colección es permitir al alumno comprender y afianzar la asimilación de la teoría a través de diversos ejercicios y ejemplos.

PRENTICE PRACTICA es una colección amena, de carácter muy didáctico y que, de una forma sencilla, consigue que el alumno obtenga un perfecto manejo práctico de la asignatura.

PRENTICE PRACTICA está dirigida al alumno para conseguir su autoaprendizaje en la materia. La colección es una de las más actualizadas del mercado.



www.pearsoneducacion.com

