

**En este capítulo...**

- 1.1 Introducción
- 1.2 Conceptos de teoría de circuitos
- 1.3 Circuitos monofásicos
- 1.4 Circuitos trifásicos
- 1.5 Componentes simétricas
- 1.6 Introducción a las redes de secuencia

**Generalidades**

## 1.1 INTRODUCCIÓN

---

Se ha considerado conveniente comenzar esta obra con un primer capítulo introductorio sobre generalidades que incluye fundamentalmente conceptos, definiciones y otros resultados básicos de teoría de circuitos, supuestamente conocidos por el lector. Sin embargo su estudio ayudará, sin duda, a la comprensión del resto de los capítulos. El presente capítulo no contiene un repaso exhaustivo de teoría de circuitos, sino sólo de aquellos resultados fundamentales de dicha teoría que apoyarán directa o indirectamente a otros capítulos de la obra, así como a la comprensión de problemas resueltos en el presente capítulo. Para un análisis en mayor profundidad de estos contenidos remitimos al lector a cualquiera de los muchos textos publicados de teoría de circuitos.

Así, los contenidos incluidos en este capítulo comprenden los conceptos básicos sobre circuitos, circuitos de corriente alterna sinusoidal monofásica, circuitos de corriente alterna sinusoidal trifásica, componentes simétricas y una introducción a las redes de secuencia.

## 1.2 CONCEPTOS DE TEORÍA DE CIRCUITOS

---

Seguidamente se presentan varios conceptos, definiciones y otros resultados básicos de teoría de circuitos, principalmente en un contexto de circuitos eléctricos lineales de parámetros concentrados.

### 1.2.1 Axiomas fundamentales: leyes de Kirchhoff

La base teórica sobre la que se sustenta el análisis de circuitos eléctricos descansa sobre las leyes de Kirchhoff. Antes de comentar estas leyes conviene repasar alguno de los conceptos y definiciones asociados a circuitos eléctricos, en concreto los conceptos de rama, nudo, lazo y malla.

*Rama:* Es un elemento o asociación de elementos que constituyen un dipolo (presenta dos terminales que permiten su inserción en un circuito eléctrico). En cualquier caso se conoce la relación entre tensión e intensidad para la rama, o al menos se conoce una de esas dos variables.

*Nudo:* Es cualquiera de los terminales de una rama. Cuando dos o más ramas están conectadas entre sí, los terminales unidos constituyen un mismo nudo.

*Lazo o bucle:* Es un conjunto de ramas que forman un camino cerrado y que no atraviesa más de una vez un mismo nudo. Así, en un lazo se cumple la condición de que partiendo de un nudo y siguiendo las ramas del lazo es posible llegar al mismo nudo sin pasar más de una vez por ningún otro nudo, y la condición de que la eliminación de cualquiera de las ramas del lazo hace que éste deje de ser un camino cerrado.

*Malla:* En circuitos planos son aquellos lazos que no contienen ninguna rama en su interior. Son planos aquellos circuitos que se pueden representar en el plano de forma que las ramas que lo componen únicamente se crucen en los nudos.

*Primera ley de Kirchhoff:* En todo circuito eléctrico, en cada uno de sus nudos y en cualquier instante de tiempo, la suma algebraica de las intensidades salientes en todas las ramas conectadas al nudo es nula.

La suma algebraica debe interpretarse como suma con signo: así, por ejemplo, las intensidades que «salen» serán negativas y las que «entran» positivas. Una formulación alternativa para esta primera ley sería: la suma de las intensidades que «entran» en un nudo es igual a la suma de las intensidades que «salen» del nudo.

*Segunda ley de Kirchhoff:* En todo circuito eléctrico, en cada uno de sus lazos y en cualquier instante de tiempo, la suma algebraica de todas las tensiones a lo largo del lazo, contabilizadas de acuerdo a un sentido de circulación, es igual a cero.

Una vez más se debe interpretar la suma algebraica como suma con signo: tensión positiva cuando, al recorrer el lazo (o malla), en cada rama circulemos de mayor a menor potencial y tensión negativa cuando circulemos de menor a mayor potencial.

## 1.2.2 Elementos básicos de circuitos eléctricos

Antes de definir los elementos básicos presentes en los circuitos eléctricos, conviene dejar claro el convenio de polaridad para tensión e intensidad. Supongamos dos nudos en un circuito,  $j$  y  $k$ ; designaremos como tensión entre esos dos puntos a la diferencia entre sus potenciales eléctricos,  $u_{jk}(t) = u_j(t) - u_k(t)$ . En los esquemas y diagramas esta tensión se representará por una flecha que parte del punto correspondiente al primer subíndice y se dirige al punto del segundo subíndice, o bien con un signo  $+$  en el punto correspondiente al primer subíndice y un signo  $-$  en el punto correspondiente al segundo subíndice, tal y como indica la Figura 1.1.

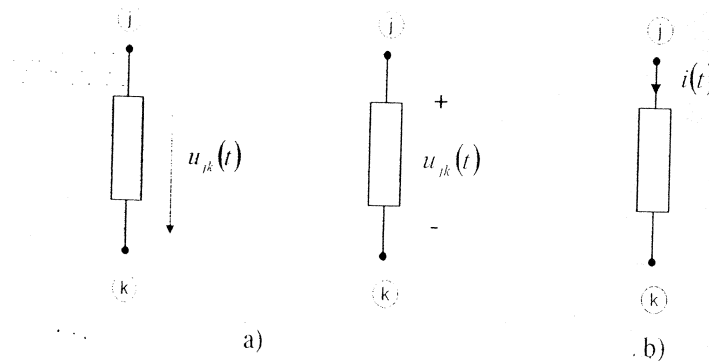


Figura 1.1. a) Convenio de polaridad para tensión. b) Convenio para sentido de referencia de la intensidad

El sentido impuesto para la intensidad se representará en los esquemas por medio de una flecha sobre los conductores que unen los distintos elementos de un circuito, tal y como se muestra en la parte b) de la Figura 1.1.

Dentro de las fuentes de tensión o de intensidad podemos distinguir entre fuentes ideales y fuentes reales. Las fuentes ideales son aquellas que, teóricamente, podrían proporcionar una potencia infinita, mientras que las reales únicamente pueden proporcionar una potencia finita. La diferencia entre unas y otras radica en que las reales, además de la fuente ideal, incorporan una rama pasiva (formada por uno o más elementos pasivos), en serie en el caso de la fuente de tensión (lo que denominaríamos su impedancia interna), o en paralelo en el caso de las fuentes de intensidad (su admitancia interna).

Los símbolos que utilizaremos en esta obra para representar las fuentes de tensión e intensidad son los representados en la Figura 1.2. Los dos símbolos de la izquierda representan a fuentes de tensión y los dos de la derecha a fuentes de intensidad. El signo  $+$  que aparece con las fuentes de tensión es para determinar la referencia de polaridad de la tensión de la fuente, indicando qué terminal es el de mayor potencial cuando  $e(t) > 0$ ; y la flecha que aparece en las fuentes de intensidad representa el sentido de circulación a través de la misma cuando  $i(t) > 0$ . Junto al símbolo de la fuente se presenta habitualmente el valor de su tensión (o una función del tiempo que la representa) para las fuentes de tensión, o un valor de intensidad (o una función del tiempo que la representa) para las fuentes de intensidad.

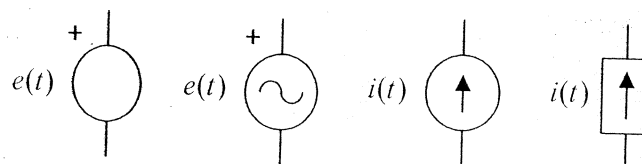
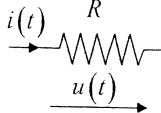
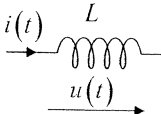
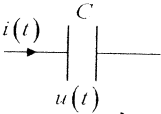


Figura 1.2. Símbolos para fuente de tensión y para fuente de intensidad

En la Tabla 1.1 aparecen reflejadas las relaciones entre tensión e intensidad para los mencionados elementos pasivos, donde  $R$  representa el valor de la resistencia,  $L$  el valor del coeficiente de autoinducción y  $C$  la capacidad. Otros elementos básicos serán tratados en el siguiente capítulo relacionado con máquinas eléctricas.

**Tabla 1.1.** Relaciones tensión-intensidad en los elementos pasivos más usuales

Elemento	Símbolo	Relación entre $u$ e $i$
Resistencia		$u(t) = Ri(t) \quad i(t) = \frac{u(t)}{R}$
Bobina		$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(t) dt + i(t_0)$
Condensador		$u(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + u(t_0) \quad i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$

### 1.3 CIRCUITOS MONOFÁSICOS

En este apartado nos referiremos a circuitos clásicos monofásicos en régimen estacionario sinusoidal, presentando conceptos básicos sobre los mismos, asociaciones de elementos en los circuitos, métodos generales de análisis de circuitos y teoremas fundamentales.

#### 1.3.1 Intensidades y tensiones en régimen estacionario sinusoidal

Habitualmente la generación, el transporte, la distribución y la utilización de la energía eléctrica se realiza bajo condiciones relativamente próximas a la forma de tensiones e intensidades en régimen estacionario sinusoidal en el tiempo.

En estas condiciones de funcionamiento, la tensión y la intensidad instantáneas en un elemento de un circuito se pueden expresar como:

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (1.1)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (1.2)$$

donde:

- $\sqrt{2}U$  (o  $\sqrt{2}I$ ) representa la amplitud o valor máximo instantáneo para la tensión (o para la intensidad),
- $U$  e  $I$  representan los valores eficaces de tensión e intensidad,
- $\varphi_u$  y  $\varphi_i$  son las fases iniciales de tensión e intensidad,
- $\omega t + \varphi_u$  representa la fase de la tensión,
- $\omega t + \varphi_i$  representa la fase de la intensidad,
- $\omega$  es la pulsación angular, relacionada con la frecuencia,  $f$ , o número de ciclos por segundo, como  $\omega = 2\pi f$ .

#### 1.3.2 Fasores

Un fasor es una representación simbólica de una función sinusoidal (por ejemplo, tensión o intensidad representadas por las funciones de las expresiones (1.1) y (1.2)). Debe tenerse en cuenta que:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{Re} \{ e^{j\varphi} \} + j \operatorname{Im} \{ e^{-j\varphi} \} \quad (1.3)$$

donde  $j$  representa la unidad imaginaria ( $j = \sqrt{-1}$ ),  $\operatorname{Re}$  es la parte real e  $\operatorname{Im}$  es la parte imaginaria.

De acuerdo a esto, una función sinusoidal se puede expresar como:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{2}F \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{2}F \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \phi)}\} = \\ &= \operatorname{Re}\{\sqrt{2}F e^{j(\omega t + \phi)}\} = \operatorname{Re}\{\sqrt{2}\bar{F} e^{j\omega t}\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $\bar{F}$  representa el fasor de la función con la información de su valor eficaz y fase inicial.

$$\bar{F} = F e^{j\phi} = F(\cos \phi + j \operatorname{sen} \phi) = F \angle \phi \quad (1.5)$$

### 1.3.3 Impedancia y admitancia en circuitos de corriente alterna sinusoidal

La impedancia  $\bar{Z}$  de un elemento (en un circuito lineal) expresa la relación entre el fasor de tensión  $\bar{U}$  y el fasor de intensidad  $\bar{I}$  (en adelante simplemente tensión  $\bar{U}$  e intensidad  $\bar{I}$ ) asociados a ese elemento y viene dada por:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U \angle \phi_u}{I \angle \phi_i} = \frac{|\bar{U}| \angle \phi_u}{|\bar{I}| \angle \phi_i} = Z \angle \varphi = R + jX \quad (1.6)$$

donde  $Z$  es el módulo de  $\bar{Z}$ ;  $\varphi$  es su argumento ( $\varphi = \phi_u - \phi_i$ );  $R$  (conocida como resistencia) es la parte real de  $\bar{Z}$ ;  $X$  (o reactancia) es la parte imaginaria de  $\bar{Z}$ ;  $|\bar{U}|$  representa el módulo de la tensión  $\bar{U}$ ; e  $|\bar{I}|$  representa el módulo de la intensidad  $\bar{I}$ . Análogamente la admitancia  $\bar{Y}$  es:

$$\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{U}} = \frac{I \angle \phi_i}{U \angle \phi_u} = \frac{|\bar{I}| \angle \phi_i}{|\bar{U}| \angle \phi_u} = Y \angle \psi = G + jB = \frac{1}{\bar{Z}} \quad (1.7)$$

donde  $Y$  es el módulo de  $\bar{Y}$ ,  $\psi$  es su argumento ( $\psi = \phi_i - \phi_u$ ),  $G$  (conocida como conductancia) es la parte real de  $\bar{Y}$ , y  $B$  (o susceptancia) es la parte imaginaria de  $\bar{Y}$ .

En la Tabla 1.2 se recogen las impedancias y admitancias de tres elementos básicos en los circuitos eléctricos.

Tabla 1.2. Impedancia y admitancia de elementos pasivos usuales

Elemento	Impedancia	Admitancia
Resistencia	$R$	$\frac{1}{R}$
Bobina	$j\omega L$	$-j\frac{1}{\omega L}$
Condensador	$-j\frac{1}{\omega C}$	$j\omega C$

### 1.3.4 Potencias activa, reactiva, aparente y compleja

La potencia activa  $P$  (en vatios, W) de un elemento (en un circuito lineal) en régimen permanente estacionario sinusoidal corresponde al valor medio de la potencia instantánea. La potencia activa consumida en una impedancia  $\bar{Z} = R + jX = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{G + jB}$  (sometida a una tensión  $\bar{U}$  y por donde circula la intensidad  $\bar{I}$ ) viene dada por:

$$P = UI \cos \varphi = RI^2 = GU^2 \quad (1.8)$$

donde  $\varphi$  representa el ángulo de desfase entre tensión e intensidad y, que obviamente, coincide con el argumento de  $\bar{Z}$ .

La correspondiente potencia reactiva (en voltamperios reactivos, VAR) asociada a  $\bar{Z}$  viene dada por:

$$Q = UI \operatorname{sen} \varphi = XI^2 = -BU^2 \quad (1.9)$$

La potencia aparente  $S$  (en voltamperios, VA) asociada a  $\bar{Z}$  es:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI = ZI^2 = YU^2 \quad (1.10)$$

Obsérvese que:

$$\begin{aligned} P &= S \cos \varphi = UI \cos \varphi \\ Q &= S \sin \varphi = UI \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.11)$$

La correspondiente potencia compleja,  $\bar{S}$ , es:

$$\bar{S} = \bar{U}\bar{I}^* = UI \angle \varphi = S \angle \varphi = P + jQ \quad (1.12)$$

Obsérvese que:

$$\bar{Y} = \frac{\bar{S}^*}{U^2} = \frac{\bar{S}^*}{|\bar{U}|^2} \quad (1.13)$$

$$\bar{I} = \left( \frac{P + jQ}{U} \right)^* = \frac{(P + jQ)^*}{U^*} \quad (1.14)$$

El factor de potencia asociado a  $\bar{Z}$  es:

$$\text{factor de potencia} = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi \quad (1.15)$$

### 1.3.5 Asociación de elementos de circuitos eléctricos

**Asociación serie.** Cuando varios elementos pasivos se encuentran asociados en serie es posible sustituirlos por un elemento equivalente que tiene como impedancia la suma (vectorial) de impedancias de los elementos conectados en serie. Así, los elementos en serie de la Figura 1.3, en régimen estacionario sinusoidal, pueden ser sustituidos por uno equivalente de acuerdo a la ecuación:

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_n = \sum_{i=1}^n \bar{Z}_i \quad (1.16)$$

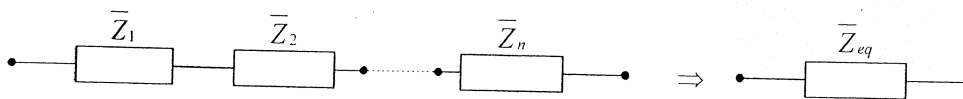


Figura 1.3. Asociación de elementos pasivos en serie

**Asociación paralelo.** Cuando varios elementos pasivos se encuentran asociados en paralelo es posible sustituirlos por un elemento equivalente que tiene como admitancia la suma de admitancias de los elementos conectados en paralelo. Así, los elementos en paralelo de la Figura 1.4 pueden ser sustituidos por uno equivalente de acuerdo a la ecuación:

$$\bar{Y}_{eq} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \dots + \bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i \quad (1.17)$$

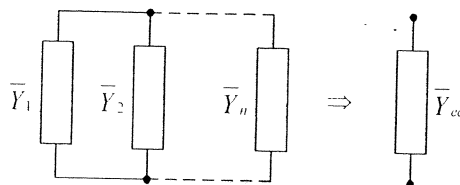


Figura 1.4. Asociación de elementos pasivos en paralelo

**Divisores de tensión y de intensidad.** Para el caso de una asociación en serie de elementos pasivos es posible determinar la caída de tensión en uno de ellos (Figura 1.5), conocida la tensión total aplicada a la asociación, por medio de la ecuación (1.18). Esta configuración es conocida como «divisor de tensión».

$$\bar{U}_k = \frac{\bar{Z}_k}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_k + \dots + \bar{Z}_n} \bar{U} = \frac{\bar{Z}_k}{\sum_{i=1}^n \bar{Z}_i} \bar{U} \quad (1.18)$$

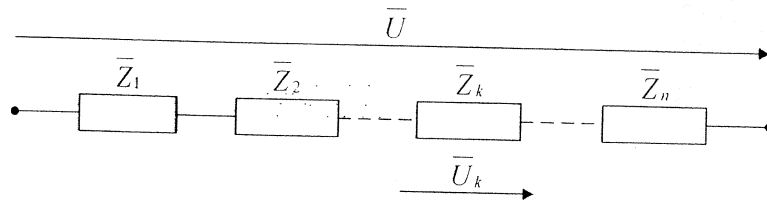


Figura 1.5. Divisor de tensión

Para el caso de una asociación en paralelo de elementos pasivos es posible determinar la intensidad a través de uno de ellos (Figura 1.6) conocida la intensidad total de la asociación por medio de la ecuación (1.19). Esta configuración es conocida como «divisor de intensidad».

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \dots + \bar{Y}_k + \dots + \bar{Y}_n} \bar{I} = \frac{\bar{Y}_k}{\sum_{i=1}^n \bar{Y}_i} \bar{I} \quad (1.19)$$

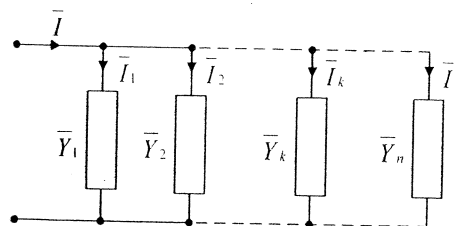


Figura 1.6. Divisor de intensidad

### 1.3.6 Métodos generales de análisis

Existen dos métodos básicos de análisis de circuitos eléctricos que conviene comentar aquí, cada uno relacionado con una de las leyes de Kirchhoff. Así, en relación a la primera ley se encuentra el método de los nudos, que será de mayor interés en la resolución de problemas; mientras que en relación a la segunda ley se encuentra el método de las mallas (para circuitos planos) que se utilizará ocasionalmente.

#### Método de los nudos

El método de los nudos consiste esencialmente en aplicar la primera ley de Kirchhoff a todos los nudos de un circuito excepto a uno, que se toma como nudo de referencia. Lo usual es numerar los nudos correlativamente para identificarlos, asignando al nudo de referencia, por ejemplo, el número 0. La aplicación de la primera ley de Kirchhoff a cada nudo supone considerar que la suma de intensidades que «salen» del nudo es igual a la suma de las intensidades que «entran» en el nudo. En concreto, podríamos expresarlo como que la intensidad neta que «sale» del nudo a través de los elementos pasivos conectados a él es igual a la intensidad neta que «entra» en el nudo proveniente de las fuentes de intensidad conectadas a él. La aplicación del método de los nudos habitualmente implica (en el contexto de resolución de los problemas)

que todas las fuentes del circuito son fuentes de intensidad; en el caso de circuitos con fuentes de tensión habrá que considerar sus respectivas fuentes de intensidad equivalentes.

La aplicación del método de los nudos para un sistema con  $n+1$  nudos dará un total de  $n$  ecuaciones con otras tantas incógnitas. Las  $n$  ecuaciones se deben a la aplicación de la primera ley de Kirchhoff a  $n$  nudos (al de referencia no se le aplica), y las  $n$  incógnitas corresponden a las tensiones de los  $n$  nudos con respecto al de referencia. La ecuación (1.20) muestra las expresiones obtenidas para un circuito sin acoplamiento con  $n$  nudos, donde  $\bar{Y}_{jk}$  representa la suma de admitancias (cambiadas de signo) conectadas entre los nudos  $j$  y  $k$ ,  $\bar{Y}_{kk}$  representa la suma de admitancias conectadas al nudo  $k$ ,  $\bar{U}_k$  la tensión del nudo  $k$  con respecto al de referencia e  $\bar{I}_k$  es la suma neta de intensidades debidas a las fuentes de intensidad conectadas al nudo  $k$  (positivas si entran, negativas si salen).

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{11}\bar{U}_1 + \bar{Y}_{12}\bar{U}_2 + \bar{Y}_{13}\bar{U}_3 + \dots + \bar{Y}_{1n}\bar{U}_n &= \bar{I}_1 \\ \bar{Y}_{21}\bar{U}_1 + \bar{Y}_{22}\bar{U}_2 + \bar{Y}_{23}\bar{U}_3 + \dots + \bar{Y}_{2n}\bar{U}_n &= \bar{I}_2 \\ &\vdots \\ \bar{Y}_{n1}\bar{U}_1 + \bar{Y}_{n2}\bar{U}_2 + \bar{Y}_{n3}\bar{U}_3 + \dots + \bar{Y}_{nn}\bar{U}_n &= \bar{I}_n \end{aligned} \quad (1.20)$$

Este último sistema de ecuaciones se representa abreviadamente tal como muestra la ecuación (1.21), donde la matriz  $[\bar{Y}_{bus}]$  se conoce como matriz de admitancias de nudo,  $[\bar{U}]$  es el vector de las tensiones de nudo (sus elementos son las tensiones de cada nudo con respecto al de referencia: así, por ejemplo, el elemento de la segunda fila,  $\bar{U}_2$ , representa la tensión del nudo 2 con respecto al nudo 0), e  $[\bar{I}]$  representa al vector de intensidades de alimentación de nudo, como se puede apreciar en las expresiones (1.22).

$$[\bar{Y}_{bus}] [\bar{U}] = [\bar{I}] \quad (1.21)$$

$$[\bar{Y}_{bus}] = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \dots & \bar{Y}_{1n} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \dots & \bar{Y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{Y}_{n1} & \bar{Y}_{n2} & \dots & \bar{Y}_{nn} \end{bmatrix} \quad [\bar{U}] = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_n \end{bmatrix} \quad [\bar{I}] = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_n \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

La resolución de (1.21) da lugar a (1.23) que permite obtener el valor del vector de las tensiones de nudo. Posteriormente a partir de estas tensiones se pueden calcular las intensidades y tensiones en cada elemento del circuito.

$$[\bar{U}] = [\bar{Y}_{bus}]^{-1} [\bar{I}] \quad (1.23)$$

### Método de las mallas

El método de las mallas, de menor interés en este contexto, consiste en aplicar la segunda ley de Kirchhoff a todas las mallas de un circuito. En el caso de circuitos no planos en lugar de aplicar dicha ley a las mallas podría aplicarse a lazos básicos. La aplicación de la segunda ley de Kirchhoff a cada malla supone considerar que la suma algebraica de tensiones a lo largo de la malla es nula, que, expresado en otros términos, sería equivalente a considerar que la suma algebraica de las tensiones generadas por las fuentes de tensión es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión en las ramas pasivas que componen la malla. La aplicación del método de las mallas supone habitualmente (en el contexto de resolución de los problemas) que todas las fuentes del circuito sean fuentes de tensión; para circuitos con fuentes de intensidad habría que considerar sus fuentes de tensión equivalentes.

La aplicación del método de las mallas para un sistema con  $n$  mallas dará un total de  $n$  ecuaciones con otras tantas incógnitas. Las  $n$  ecuaciones se deben a la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff a cada una de las mallas y las  $n$  incógnitas corresponden a las intensidades de malla. Estas intensidades de malla son intensidades «circulares» que recorren cada una de las mallas, siendo la intensidad «verdadera» que circula por cada rama la suma algebraica de las intensidades de malla que la atraviesan. La ecuación (1.24) muestra las expresiones obtenidas para un circuito sin acoplamiento con  $n$  mallas, donde  $\bar{Z}_{jk}^m$  representa la suma de impedancias comunes a las mallas  $j$  y  $k$  tomadas positivas si las intensidades de ambas mallas coinciden en sentido y negativas si no coinciden;  $\bar{Z}_{kk}^m$  representa la suma de impedancias de las ramas de la malla  $k$ ,  $\bar{I}_k$  la



intensidad de la malla  $k$  y  $\bar{E}_k$  es la suma algebraica de las tensiones de las fuentes de tensión pertenecientes a la malla  $k$  (positivas si la intensidad de malla «sale» por su terminal positivo, negativas en caso contrario).

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{11}^m \bar{I}_1 + \bar{Z}_{12}^m \bar{I}_2 + \bar{Z}_{13}^m \bar{I}_3 + \cdots + \bar{Z}_{1n}^m \bar{I}_n &= \bar{E}_1 \\ \bar{Z}_{21}^m \bar{I}_1 + \bar{Z}_{22}^m \bar{I}_2 + \bar{Z}_{23}^m \bar{I}_3 + \cdots + \bar{Z}_{2n}^m \bar{I}_n &= \bar{E}_2 \\ &\vdots \\ \bar{Z}_{n1}^m \bar{I}_1 + \bar{Z}_{n2}^m \bar{I}_2 + \bar{Z}_{n3}^m \bar{I}_3 + \cdots + \bar{Z}_{nn}^m \bar{I}_n &= \bar{E}_n\end{aligned}\tag{1.24}$$

Conviene señalar aquí que estas impedancias de (1.24) no son las que aparecen más adelante en otros capítulos cuando se habla de los elementos de las matrices de impedancias de nudo (una matriz de impedancias de nudo es la inversa de la correspondiente matriz de admitancias de nudo). Por ello se ha utilizado aquí el superíndice  $m$  para diferenciarlas. La resolución de (1.24) puede ser de utilidad, como se verá, en algunos problemas relativamente sencillos.

### 1.3.7 Teoremas fundamentales

Seguidamente se recogen aplicaciones de una selección de teoremas (en algunos libros recogidos como principios o reglas) que son de utilidad en la resolución de determinados problemas.

**Teorema de sustitución.** Cualquier elemento (o rama) de un circuito puede ser sustituido por otro elemento (o rama) que al ser recorrido por la misma intensidad que el elemento (o rama) original ocasione en él la misma caída de tensión. Bajo estas condiciones las intensidades y tensiones en el resto del circuito permanecen inalteradas tras realizar la sustitución.

La principal utilidad de este teorema está en la simplificación de circuitos, al poder sustituir varios elementos que formen una rama por un único elemento (por ejemplo una fuente de tensión ideal), pero se debe conocer de antemano la intensidad y caída de tensión en el elemento (o rama) original.

**Teorema de Thévenin.** Cualquier circuito lineal de dos terminales (dipolo) puede ser reemplazado por un circuito equivalente (llamado equivalente Thévenin) constituido por una fuente de tensión ideal y una impedancia en serie, siempre que no exista «acoplamiento» (o «dependencia» debida a alguna fuente dependiente) entre el dipolo y la carga conectada a sus dos terminales. La tensión de la fuente ideal es igual a la tensión existente entre los dos terminales del circuito original cuando se encuentra a circuito abierto (llamada tensión de Thévenin), y la impedancia serie (impedancia Thévenin) es la existente entre los dos terminales del circuito original tras anular las fuentes independientes (cortocircuitar las de tensión y abrir las de intensidad) y con todas las condiciones iniciales nulas. Esta impedancia se puede calcular también como el cociente entre la tensión de Thévenin y la intensidad que circularía al cortocircuitarse los dos terminales del circuito.

La principal utilidad del teorema de Thévenin es la de simplificar todo un circuito complejo dejándolo reducido a una fuente de tensión y una impedancia serie.

**Teorema de Norton.** Cualquier circuito lineal de dos terminales (dipolo) con fuentes independientes puede ser reemplazado por un circuito equivalente (llamado equivalente Norton) constituido por una fuente de intensidad ideal y una impedancia en paralelo, siempre que no exista «acoplamiento» (o «dependencia» debida a alguna fuente dependiente) entre el dipolo y la carga conectada a sus dos terminales. La intensidad de la fuente ideal coincide con la intensidad entre los dos terminales del circuito al ser cortocircuitados (llamada intensidad de Norton), y la impedancia paralelo es la existente entre los dos terminales del circuito original tras anular las fuentes independientes (cortocircuitar las de tensión y abrir las de intensidad) y con todas las condiciones iniciales nulas. Esta impedancia se puede calcular también como el cociente entre la tensión de Thévenin y la intensidad de Norton.

El equivalente Norton y el equivalente Thévenin de un circuito son precisamente fuentes equivalentes, una de intensidad y la otra de tensión. Conocido el equivalente Thévenin, su transformación al equivalente Norton es similar a la transformación de una fuente de tensión a fuente de intensidad equivalente, y viceversa. La impedancia (admitancia) que aparece en ambos equivalentes es la misma.

**Teorema de superposición.** La intensidad (o la tensión) en cualquier elemento (o rama) de un circuito eléctrico lineal, con condiciones iniciales nulas, debida a la presencia de fuentes independientes en dicho circuito, se puede obtener mediante la suma algebraica de las intensidades (o las tensiones) originadas independientemente por cada una de las fuentes del circuito.

**Transformación estrella-triángulo.** Existe un teorema conocido como el teorema de Rosen cuya aplicación permite obtener el polígono equivalente a una asociación de elementos pasivos en estrella, si bien en la práctica es de mayor utilidad la transformación entre estrella (de tres puntas) y triángulo y su transformación inversa.

Supongamos una estrella formada por tres impedancias de valores  $\bar{Z}_1$ ,  $\bar{Z}_2$  y  $\bar{Z}_3$  que es equivalente a un triángulo de impedancias  $\bar{Z}_{12}$ ,  $\bar{Z}_{23}$  y  $\bar{Z}_{31}$ , como se muestra en la Figura 1.7. Las relaciones entre las impedancias de la estrella y el triángulo vienen dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1 &= \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} & \bar{Z}_{12} &= \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} \\ \bar{Z}_2 &= \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} & \bar{Z}_{23} &= \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \frac{\bar{Z}_2\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1} \\ \bar{Z}_3 &= \frac{\bar{Z}_{23}\bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} & \bar{Z}_{31} &= \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3 + \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

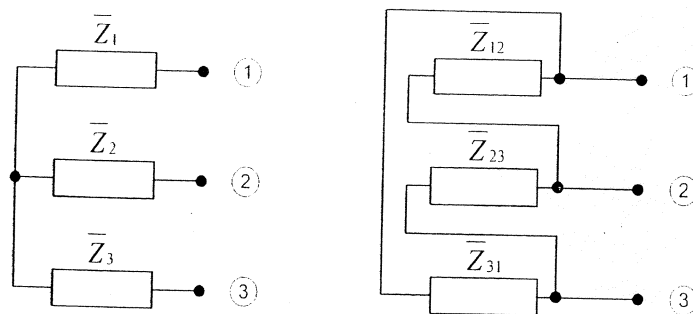


Figura 1.7. Estrella y triángulo equivalentes

## 1.4 CIRCUITOS TRIFÁSICOS

En este apartado describiremos las conexiones en estrella y en triángulo para cargas trifásicas (o fuentes de tensión trifásicas) y conceptos fundamentales sobre los conocidos circuitos trifásicos equilibrados en régimen estacionario sinusoidal.

### 1.4.1 Conexiones en estrella y en triángulo

Con frecuencia se utilizan dos posibles formas de conexión de las tres fases de una carga trifásica: en estrella o en triángulo. En la conexión en estrella las tres fases presentan un punto o nudo común que denominamos neutro de la estrella y que puede, a su vez, estar conectado (directamente o a través de una impedancia) a tierra o al neutro del sistema. En el caso de la conexión en triángulo las tres fases se conectan entre sí uniendo sus terminales dos a dos como muestra la Figura 1.8. (Para un generador, de forma análoga, puede plantearse la conexión en estrella o en triángulo).

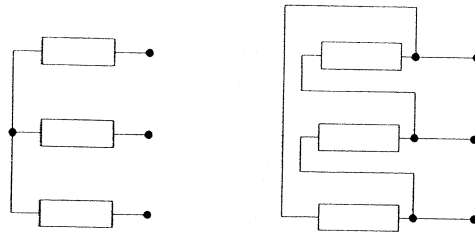


Figura 1.8. Conexión en estrella (izquierda) y en triángulo (derecha) de una carga trifásica

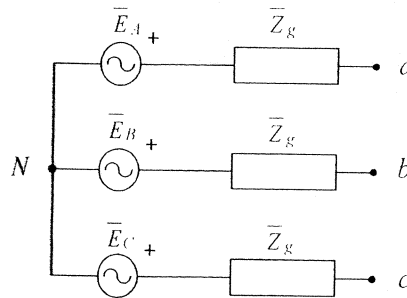


Figura 1.9. Fuente de tensión trifásica

### 1.4.2 Circuitos equilibrados: valores de fase y de línea

Sea un generador trifásico compuesto por tres fuentes de tensión alterna sinusoidal de la misma amplitud y frecuencia, conectadas en estrella, tal y como muestra la Figura 1.9, donde  $\bar{Z}_g$  representa la impedancia interna de cada fuente. Es frecuente considerar que las correspondientes tensiones  $\bar{E}_A$ ,  $\bar{E}_B$  y  $\bar{E}_C$ , forman un sistema trifásico equilibrado de secuencia directa. Así pues, si  $\varphi_a$  es el argumento de  $\bar{E}_A$ , se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{E}_A &= E \angle \varphi_a \\ \bar{E}_B &= E \angle \varphi_a - 120^\circ \\ \bar{E}_C &= E \angle \varphi_a - 240^\circ = E \angle \varphi_a + 120^\circ\end{aligned}\quad (1.26)$$

Una tensión de línea (a veces también llamada tensión «fase-fase») es la existente entre dos conductores de fase del sistema. Así, por ejemplo, la tensión  $\bar{U}_{ab}$  designará la tensión de línea entre la fase  $a$  y la fase  $b$ . Aquí, para este caso se entenderá como tensión de fase la tensión entre una fase y el neutro de la estrella. Así, por ejemplo, la tensión  $\bar{U}_{aN}$  designará la tensión de fase asociada a la fase  $a$ .

### 1.4.3 Circuitos trifásicos equilibrados

Un circuito trifásico equilibrado (con condiciones de simetría) se puede analizar mediante un circuito monofásico (denominado circuito monofásico «equivalente»).

Para el caso de un circuito equilibrado de la Figura 1.10, (con conexión en estrella en la carga trifásica y estrella en el generador trifásico), el circuito equivalente (asociado a la fase  $a$ ) viene dado por la Figura 1.11, donde  $\bar{Z}_L$  está asociada a la impedancia-serie trifásica de la Figura 1.10 y  $\bar{Z}$  representa la impedancia por fase de la carga trifásica de la Figura 1.10. Obsérvese que, conocida  $\bar{U}_{aN}$  y las impedancias mencionadas, es inmediato determinar la intensidad  $\bar{I}_a$ . En las condiciones señaladas,  $\bar{I}_a$ ,  $\bar{I}_b$  e  $\bar{I}_c$  forman un sistema trifásico de intensidades equilibradas de secuencia directa. Obsérvese en este caso que

$$|\bar{U}_{ab}| = |\bar{U}_{bc}| = |\bar{U}_{ca}| = \sqrt{3} |\bar{U}_{aN}| = \sqrt{3} |\bar{U}_{bN}| = \sqrt{3} |\bar{U}_{cN}|$$

Análogas expresiones se pueden establecer entre las tensiones de línea y las tensiones de fase en la carga trifásica equilibrada de la Figura 1.10.

Para el caso de un circuito trifásico equilibrado, con conexión triángulo en la carga trifásica (o conexión triángulo en el generador trifásico), se puede hacer una transformación a una estrella equivalente y proceder de forma similar a lo anteriormente indicado.

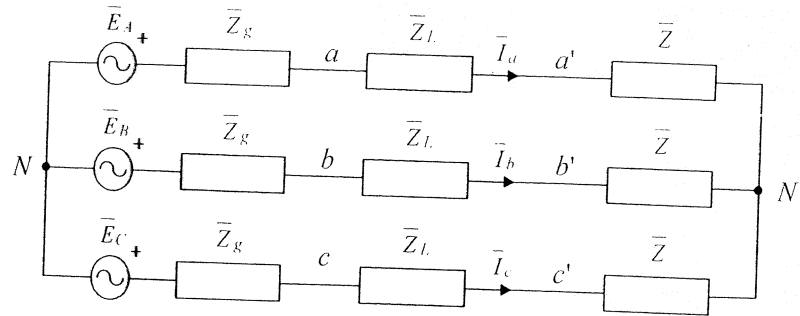


Figura 1.10. Circuito trifásico equilibrado estrella-estrella

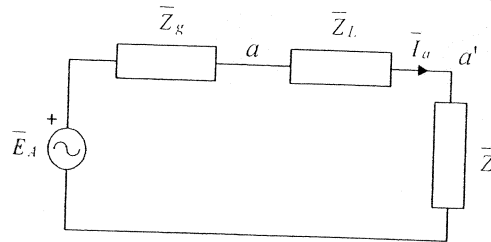


Figura 1.11. Circuito monofásico «equivalente»

#### 1.4.4 Potencia en circuitos trifásicos equilibrados

La potencia (potencia activa, o bien la potencia reactiva, o bien la potencia aparente) consumida por un receptor o carga trifásica (o suministrada por un generador trifásico) es, para los sistemas equilibrados mencionados, igual al triple de la potencia (potencia activa, o bien de la potencia reactiva, o bien de la potencia aparente) consumida (o suministrada) por una de las fases.

Por ejemplo, la potencia activa consumida por la carga trifásica de la Figura 1.10 es el triple de la consumida por la impedancia  $\bar{Z}$ . Así la potencia consumida en la impedancia  $\bar{Z}$  es

$$|\bar{U}_{a'N'}| |\bar{I}_a| \cos \varphi \quad (1.27)$$

o bien,

$$\frac{|\bar{U}_{a'b'}|}{\sqrt{3}} |\bar{I}_a| \cos \varphi \quad (1.28)$$

Por tanto, en la carga trifásica (de la Figura 1.10) se consumirá una potencia activa:

$$3 |\bar{U}_{a'N'}| |\bar{I}_a| \cos \varphi \quad (1.29)$$

o bien,

$$\sqrt{3} |\bar{U}_{a'b'}| |\bar{I}_a| \cos \varphi \quad (1.30)$$

Expresiones similares o afines se pueden desarrollar para la potencia reactiva o para la potencia aparente.

### 1.5 COMPONENTES SIMÉTRICAS

Un sistema trifásico de fasores de tensiones (o de intensidades), bien sea equilibrado o bien sea desequilibrado, se puede expresar como combinación lineal de las componentes simétricas que son:

1. Componentes de secuencia cero o secuencia homopolar, consistentes en tres fasores iguales en módulo y argumento. En este libro se representarán con el subíndice 0.
2. Componentes de secuencia directa o secuencia positiva, consistentes en tres fasores de igual magnitud y desfasados entre sí  $120^\circ$  y con secuencia directa. En este libro se representarán con el subíndice 1.

3. Componentes de **secuencia inversa** o secuencia negativa, consistentes en tres fasores de igual magnitud y desfasados **entre sí**  $120^\circ$  pero con secuencia inversa. En este libro se representarán con el subíndice 2.

Suponiendo un sistema de fasores de tensión  $\bar{U}_a, \bar{U}_b$  y  $\bar{U}_c$ , sus componentes simétricas  $\bar{U}_{a1}, \bar{U}_{b1}, \bar{U}_{c1}, \bar{U}_{a2}, \bar{U}_{b2}, \bar{U}_{c2}, \bar{U}_{a0}, \bar{U}_{b0}$  y  $\bar{U}_{c0}$  están representadas en la Figura 1.12, siendo las componentes simétricas básicas  $\bar{U}_1, \bar{U}_2$  y  $\bar{U}_0$ .

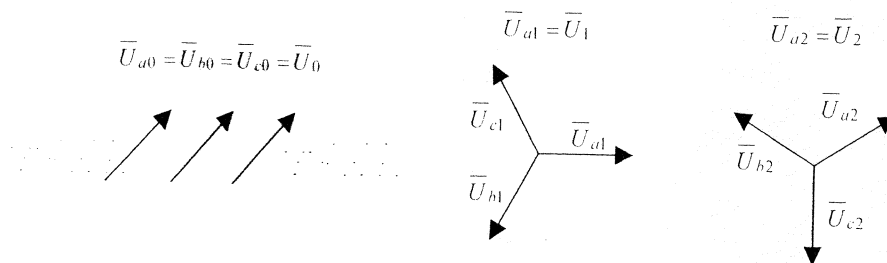


Figura 1.12. Componentes simétricas

Obviamente si el sistema original de fasores  $\bar{U}_a, \bar{U}_b$  y  $\bar{U}_c$  es equilibrado y de secuencia directa, la única componente simétrica básica no nula será la de secuencia directa  $\bar{U}_1$ , mientras que para sistemas desequilibrados pueden tener valores no nulos las tres componentes simétricas básicas.

Para el cálculo de los fasores reales  $\bar{U}_a, \bar{U}_b$  y  $\bar{U}_c$  a partir de sus componentes simétricas básicas,  $\bar{U}_1, \bar{U}_2$  y  $\bar{U}_0$ , se utiliza la ecuación (1.31). Para el cálculo de estas componentes, se utiliza la transformación expresada en la ecuación (1.32). El valor del número complejo  $a$  está expresado en la ecuación (1.33).

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \\ \bar{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_0 \\ \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \bar{U}_0 \\ \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_0 \\ \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \\ \bar{U}_c \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \\ \bar{U}_c \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

$$a = 1 \angle 120^\circ = \frac{-1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1.33)$$

Y de la misma manera que hemos definido las componentes simétricas básicas para los fasores de tensión, se pueden definir las componentes simétricas para las intensidades, e igualmente establecer las ecuaciones (1.34) y (1.35).

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

## 1.6 INTRODUCCIÓN A LAS REDES DE SECUENCIA

En el apartado anterior hemos definido las componentes simétricas básicas (en adelante y por simplicidad, componentes simétricas) de fasores de tensiones (o de intensidades), indicando las formas de calcularlas a partir de los fasores o bien la forma de calcular éstos a partir de las componentes simétricas. Conviene ahora comentar las relaciones entre las componentes simétricas de tensiones y las de intensidades en elementos trifásicos (bajo ciertas condiciones específicas) como son las cargas trifásicas o las

impedancias-serie (en el siguiente capítulo se describirán para otros elementos: transformadores y máquinas síncronas).

En condiciones adecuadas de simetría, en cargas trifásicas (cargas tipo impedancia) las relaciones entre las componentes simétricas de las tensiones y de las intensidades (tensiones e intensidades en las cargas trifásicas) se puede expresar a través de tres circuitos monofásicos que denominaremos circuitos de secuencia: circuito de secuencia directa (relacionando las componentes simétricas directas de tensiones e intensidades); circuito de secuencia inversa (relacionando las componentes simétricas inversas de tensiones e intensidades); y circuito de secuencia homopolar (relacionando las componentes simétricas homopolares de tensiones e intensidades).

En la Figura 1.13 se recogen las redes de secuencia para cargas trifásicas equilibradas conectadas en estrella o triángulo (con simetría).

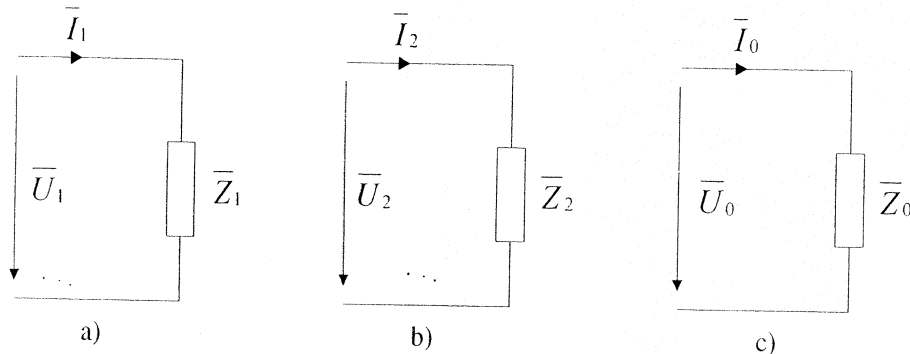


Figura 1.13. Circuitos de secuencia para cargas trifásicas con simetría

Si la carga trifásica equilibrada, en estrella, tiene simplemente una impedancia  $\bar{Z}_Y$  en cada una de sus fases y una impedancia  $\bar{Z}_n$  que conecta su neutro a tierra, entonces, la impedancia  $\bar{Z}_1$  del circuito de secuencia directa es  $\bar{Z}_Y$  (Figura 1.13 a)). El circuito de secuencia inversa es similar al de secuencia directa (Figura 1.13 b)) y su impedancia  $\bar{Z}_2$  coincide con  $\bar{Z}_1$ . Y el circuito de secuencia homopolar tiene una impedancia  $\bar{Z}_0 = \bar{Z}_Y + 3\bar{Z}_n$  (Figura 1.13 c)).

Cuando la carga equilibrada en triángulo tiene simplemente una impedancia  $\bar{Z}_\Delta$ , entonces en el circuito de secuencia directa la impedancia  $\bar{Z}_1$  es  $\bar{Z}_\Delta/3$  (y en el circuito de secuencia inversa,  $\bar{Z}_2$  es igual a  $\bar{Z}_1$ ). El circuito de secuencia homopolar tiene una impedancia  $\bar{Z}_0$  que tiende a infinito (ese circuito de secuencia homopolar tiene un valor nulo para la componente simétrica homopolar de intensidad).

En el caso de una carga trifásica genérica equilibrada, con simetría, suponiendo que  $\bar{Z}_{aa}$  representa la impedancia propia de cada fase (equivalente en estrella, con la condición  $\bar{Z}_{aa} = \bar{Z}_{bb} = \bar{Z}_{cc}$ ) y  $\bar{Z}_{ab}$  la impedancia de «acoplamiento» entre fases  $a$  y  $b$  (siendo  $\bar{Z}_{ab} = \bar{Z}_{bc} = \bar{Z}_{ca} = \bar{Z}_{ba} = \bar{Z}_{cb} = \bar{Z}_{ac}$ ) se puede comprobar que el circuito de secuencia directa contiene la impedancia  $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_{aa} - \bar{Z}_{ab}$  (y en el circuito de secuencia inversa la impedancia  $\bar{Z}_2$  es igual a  $\bar{Z}_1$ ), mientras que el circuito de secuencia homopolar contiene la impedancia  $\bar{Z}_0 = \bar{Z}_{aa} + 2\bar{Z}_{ab}$ .

En el caso de impedancias-serie trifásica con simetría, los circuitos de secuencia aparecen en la Figura 1.14: circuito de secuencia directa en la Figura 1.14 a), (relacionando las componentes simétricas de secuencia directa de tensiones e intensidades); circuito de secuencia inversa en la Figura 1.14 b), (relacionando las componentes simétricas de secuencia inversa de tensiones e intensidades); y circuito de secuencia homopolar en la Figura 1.14 c), (relacionando las componentes simétricas homopolares de tensiones e intensidades).

Supuesto que la impedancia-serie de cada una de las fases (de la impedancia-serie trifásica) es simplemente  $\bar{Z}_L$ , entonces el circuito de secuencia directa (Figura 1.14 a)) contiene la impedancia  $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_L$  (y en el circuito de secuencia inversa, Figura 1.14 b), la impedancia  $\bar{Z}_2$  es igual a  $\bar{Z}_1$ ), mientras que el circuito de secuencia homopolar (Figura 1.14 c)) contiene la impedancia  $\bar{Z}_0 = \bar{Z}_L$ .

Para una impedancia-serie genérica equilibrada, con simetría, si además de la impedancia  $\bar{Z}_L$  tiene una impedancia de «acoplamiento» entre fases  $\bar{Z}_{ACP}$  (la misma impedancia  $\bar{Z}_{ACP}$  entre cada dos fases) entonces se puede comprobar que  $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_L - \bar{Z}_{ACP} = \bar{Z}_2$ , mientras que  $\bar{Z}_0 = \bar{Z}_L + 2\bar{Z}_{ACP}$ .

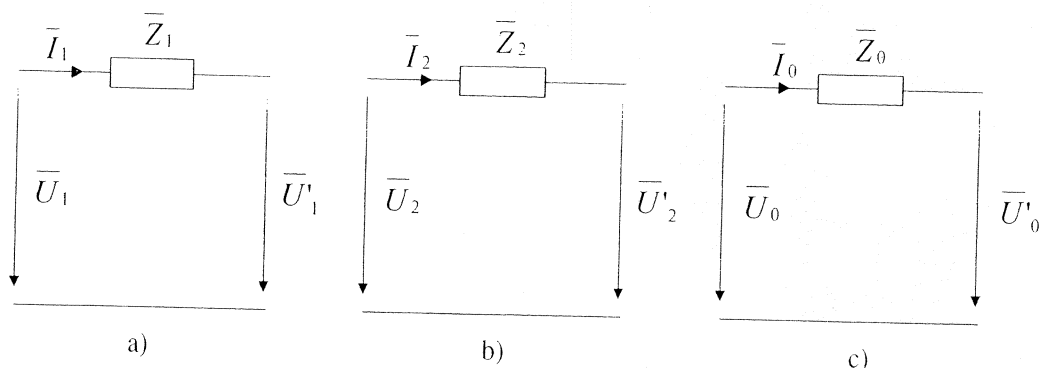


Figura 1.14. Circuitos de secuencia para impedancias-serie trifásicas con simetría

Cuando existen varios elementos trifásicos (cargas trifásicas, impedancias-serie trifásicas, transformadores, generadores síncronos, etc.) en un sistema de energía eléctrica, en condiciones adecuadas de simetría, se pueden determinar habitualmente los circuitos de secuencia del sistema a partir de los circuitos de secuencia de cada uno de los elementos trifásicos: los circuitos de secuencia del sistema de energía eléctrica así determinados suelen denominarse redes de secuencia del sistema (redes de secuencia directa, de secuencia inversa y de secuencia homopolar), que aparecerán más adelante en otros capítulos.

Una de las aplicaciones de interés de las redes de secuencia es su utilidad en el análisis de cortocircuitos trifásicos desequilibrados, como se verá posteriormente en esta obra.

## PROBLEMAS RESUELTOS

- 1.1 Determinar las potencias activas y reactivas entregadas por las dos fuentes del circuito de la Figura 1.15 en régimen estacionario sinusoidal.

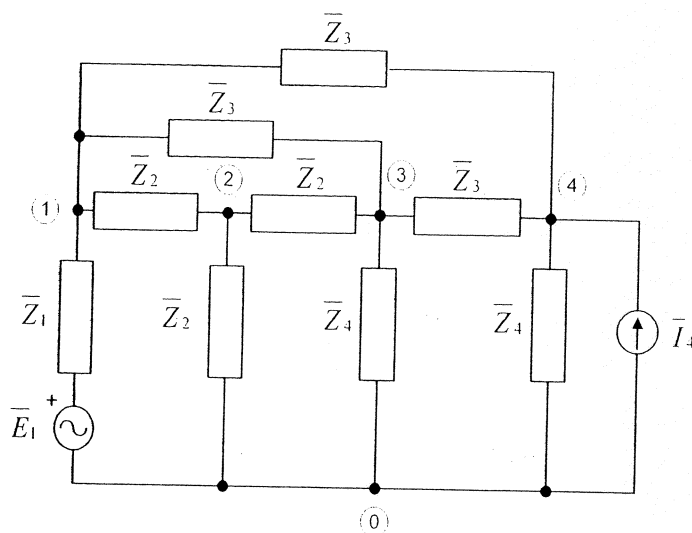


Figura 1.15. Circuito eléctrico del problema 1.1

Datos:  $\bar{Z}_1 = 0.2 + j0.3 \Omega$ ,  $\bar{Z}_2 = 0.6 + j1 \Omega$ ,  $\bar{Z}_3 = 0.8 + j1.2 \Omega$ ,  $\bar{Z}_4 = 0.3 - j0.4 \Omega$   
 $\bar{E}_1 = 115 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $\bar{I}_4 = 100 \angle -15^\circ \text{ A}$ .

### RESOLUCIÓN.

Transformando la fuente de intensidad en fuente de tensión, el circuito consta de cinco mallas. La aplicación del método de las mallas dará lugar a cinco ecuaciones con otras tantas incógnitas, mientras

que la aplicación del método de los nudos dará lugar a una ecuación y una incógnita menos. Por ello seleccionamos el método de los nudos para el análisis del circuito.

Formando directamente la matriz  $[\bar{Y}_{bus}]$ , ésta queda:

$$[\bar{Y}_{bus}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{2}{\bar{Z}_3} & -\frac{1}{\bar{Z}_2} & -\frac{1}{\bar{Z}_3} & -\frac{1}{\bar{Z}_3} \\ -\frac{1}{\bar{Z}_2} & \frac{3}{\bar{Z}_2} & -\frac{1}{\bar{Z}_2} & 0 \\ -\frac{1}{\bar{Z}_3} & -\frac{1}{\bar{Z}_2} & \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{2}{\bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_4} & -\frac{1}{\bar{Z}_3} \\ -\frac{1}{\bar{Z}_3} & 0 & -\frac{1}{\bar{Z}_3} & \frac{2}{\bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7489 - j4.1968 & -0.4412 + j0.7353 & -0.3846 + j0.5769 & -0.3846 + j0.5769 \\ -0.4412 + j0.7353 & 1.3235 - j2.2059 & -0.4412 + j0.7353 & 0 \\ -0.3846 + j0.5769 & -0.4412 + j0.7353 & 2.4104 - j0.2891 & -0.3846 + j0.5769 \\ -0.3846 + j0.5769 & 0 & -0.3846 + j0.5769 & 1.9692 + j0.4462 \end{bmatrix} \Omega^{-1}$$

El vector de intensidades de alimentación de nudo  $[\bar{I}]$  debida a fuentes sólo presenta valores no nulos en las filas 1 y 4, ya que los nudos 2 y 3 no tienen ninguna fuente conectada a los mismos. Transformando la fuente de tensión del nudo 1 en fuente de intensidad, la intensidad de la misma entra en el nudo y es de valor igual a la tensión de la fuente,  $\bar{E}_1$ , dividido por la impedancia  $\bar{Z}_1$ .

$$[\bar{I}] = \begin{bmatrix} \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 176.92 - j265.38 \\ 0 \\ 0 \\ 96.59 - j25.88 \end{bmatrix} \text{ A}$$

El vector de tensiones de nudo (en voltios) se puede expresar como:  $[\bar{U}] = [\bar{Y}_{bus}]^{-1} [\bar{I}]$ . Por tanto:

$$[\bar{U}] = \begin{bmatrix} 0.1443 + j0.1593 & 0.0776 + j0.0396 & 0.0885 - j0.0405 & 0.0667 - j0.0601 \\ 0.0776 + j0.0396 & 0.2812 + j0.3343 & 0.1660 - j0.0367 & 0.0308 - j0.0778 \\ 0.0885 - j0.0405 & 0.1660 - j0.0367 & 0.4095 - j0.0697 & 0.0257 - j0.1733 \\ 0.0667 - j0.0601 & 0.0308 - j0.0778 & 0.0257 - j0.1733 & 0.4195 - j0.1677 \end{bmatrix} [\bar{I}] = \begin{bmatrix} 72.6743 - j17.6490 \\ 25.1989 - j21.9016 \\ 2.9223 - j48.0557 \\ 32.0198 - j55.3780 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \end{bmatrix}$$

La intensidad en la fuente de tensión  $\bar{E}_1$  se puede calcular como la caída de tensión en la impedancia que tiene en serie dividida por su valor:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{U}_1}{\bar{Z}_1} = 105.85 - j70.522 \text{ A}$$

Para la primera fuente la potencia compleja es:

$$\bar{S}_1 = \bar{E}_1 \bar{I}_1^* = 12172 + j8110.1 \text{ VA}$$

La potencia compleja entregada por la fuente de intensidad se puede calcular directamente como el producto de la tensión en sus extremos y el conjugado de la intensidad de la misma:

$$\bar{S}_4 = \bar{U}_4 \bar{I}_4^* = 4526.2 - j4520.4 \text{ VA}$$



Expresadas en términos de potencias activa y reactiva, las potencias que entregan cada una de las dos fuentes son:

$$P_1 = 12\,172\text{ W} \quad Q_1 = 8\,110.1\text{ VAR}$$

$$P_4 = 4\,526.2\text{ W} \quad Q_4 = -4\,520.4\text{ VAR}$$

Como se puede apreciar, la fuente  $\bar{E}_1$  genera potencia activa y reactiva, mientras que la fuente  $\bar{E}_4$  genera potencia activa, pero consume potencia reactiva.

- 1.2 Determinar las potencias entregadas por las dos fuentes del circuito de la Figura 1.16 en régimen estacionario sinusoidal.

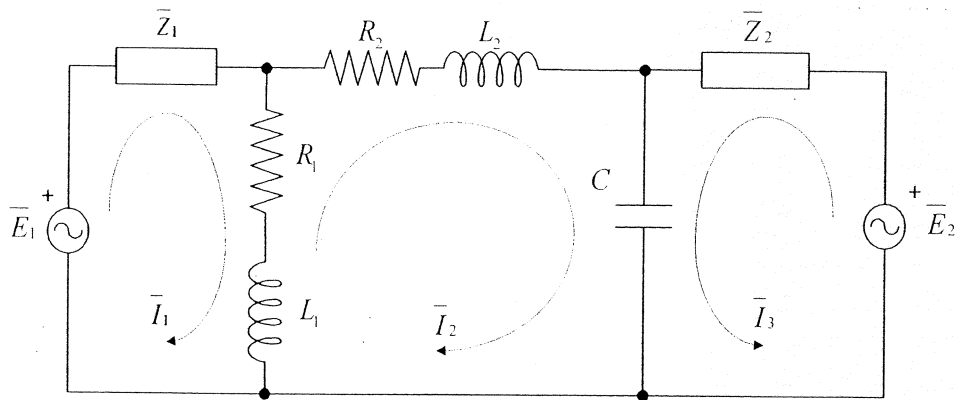


Figura 1.16. Circuito eléctrico del problema 1.2

Datos:  $\omega = 100\text{ rad/s}$ ,  $R_1 = 6\ \Omega$ ,  $R_2 = 4\ \Omega$ ,  $L_1 = 0.8\text{ H}$ ,  $L_2 = 0.3\text{ H}$ ,  
 $C = 100\ \mu\text{F}$ ,  $\bar{Z}_1 = 2 + j4\ \Omega$ ,  $\bar{Z}_2 = 1 + j3\ \Omega$ ,  $\bar{E}_1 = 150\angle 0^\circ\text{ V}$ ,  $\bar{E}_2 = 120\angle -15^\circ\text{ V}$ .

**RESOLUCIÓN.**

Estableciendo las intensidades de malla tal y como se han representando en la Figura 1.16 y escribiendo directamente las ecuaciones de malla tenemos:

$$\bar{E}_1 = (\bar{Z}_1 + R_1 + jL_1\omega)\bar{I}_1 + (-R_1 - jL_1\omega)\bar{I}_2$$

$$0 = (-R_1 - jL_1\omega)\bar{I}_1 + (R_1 + R_2 + jL_1\omega + jL_2\omega - j\frac{1}{\omega C})\bar{I}_2 + (-j\frac{1}{\omega C})\bar{I}_3$$

$$\bar{E}_2 = (-j\frac{1}{\omega C})\bar{I}_2 + (\bar{Z}_2 - j\frac{1}{\omega C})\bar{I}_3$$

Tras sustituir los valores numéricos y expresando de forma matricial las tres ecuaciones anteriores,

$$\begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ 115.91 - j31.058 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + j84 & -6 - j80 & 0 \\ -6 - j80 & 10 + j10 & -j100 \\ 0 & -j100 & 1 - j97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix}$$

La resolución de este sistema da como valores de las intensidades de malla:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1841 - j2.1648 \\ 1.0596 - j0.4370 \\ -0.7551 + j1.6532 \end{bmatrix} \text{ A}$$

En cuanto a las potencias entregadas por las dos fuentes, expresadas como potencias complejas, tendremos:

$$\bar{S}_1 = \bar{E}_1 \bar{I}_1^* = 150(1.1841 + j2.1648) = 177.61 + j324.72 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_2 = \bar{E}_2 \bar{I}_3^* = (115.91 - j31.058)(-0.7551 - j1.6532) = -138.87 - j168.17 \text{ VA}$$

Así, las potencias activas y reactivas entregadas por las dos fuentes son:

$$P_1 = 177.61 \text{ W} \quad Q_1 = 324.72 \text{ VAR}$$

$$P_2 = -138.87 \text{ W} \quad Q_2 = -168.17 \text{ VAR}$$

La fuente  $\bar{E}_1$  entrega al circuito tanto potencia activa como reactiva, mientras que la fuente  $\bar{E}_2$  consume tanto potencia activa como reactiva.

- **1.3** Determinar los valores de  $\bar{I}$ ,  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$ ,  $\bar{I}_3$ ,  $\bar{U}_a$  y  $\bar{U}_b$  aplicando divisores de tensión y divisores de intensidad en el circuito de la Figura 1.17 en régimen estacionario sinusoidal.

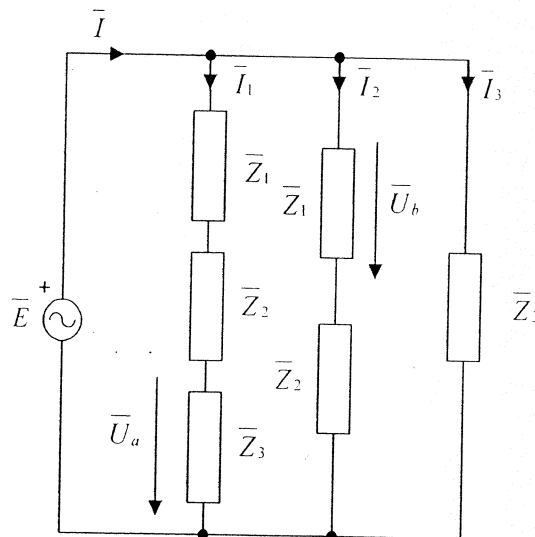


Figura 1.17. Circuito eléctrico del problema 1.3

Datos:  $\bar{E} = 150 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $\bar{Z}_1 = 2 + j2 \Omega$ ,  $\bar{Z}_2 = 2 + j4 \Omega$ ,  $\bar{Z}_3 = 4 + j2 \Omega$ .

**RESOLUCIÓN.**

Las tensiones  $\bar{U}_a$  y  $\bar{U}_b$  serán determinadas por medio de divisores de tensión. La tensión total aplicada es conocida,  $\bar{E}$ , con lo que estas tensiones tendrán de valor:

$$\bar{U}_a = \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} \bar{E} = \frac{4 + j2}{8 + j8} 150 = 56.25 - j18.75 = 59.293 \angle -18.43^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_b = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{E} = \frac{2 + j2}{4 + j6} 150 = 57.6923 - j11.5385 = 58.835 \angle -11.31^\circ \text{ V}$$

La intensidad total  $\bar{I}$  se puede calcular como el producto de la tensión de la fuente y la admitancia equivalente a las tres ramas en paralelo, que denominaremos  $\bar{Y}_t$ .

$$\bar{Y}_t = \frac{1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} = \frac{1}{8 + j8} + \frac{1}{4 + j6} + \frac{1}{4 + j2} = 0.3394 - j0.2779 \Omega^{-1}$$

$$\bar{I} = \bar{Y}_t \bar{E} = (0.3394 - j0.2779) 150 = 50.913 - j41.683 = 65.8 \angle -39.31^\circ \text{ A}$$

Una vez determinada la intensidad total, la de cada rama se puede calcular por medio de divisores de intensidad:

$$\bar{I}_1 = \frac{\frac{1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}}{\bar{Y}_T} \bar{I} = \frac{0.0625 - j0.0625}{0.3394 - j0.2779} (50.913 - j41.683) = 9.375 - j9.375 = 13.258 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\frac{1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}}{\bar{Y}_T} \bar{I} = \frac{0.0769 - j0.1154}{0.3394 - j0.2779} (50.913 - j41.683) = 11.538 - j17.308 = 20.801 \angle -56.31^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\frac{1}{\bar{Z}_3}}{\bar{Y}_T} \bar{I} = \frac{0.2 - j0.1}{0.3394 - j0.2779} (50.913 - j41.683) = 30 - j15 = 33.541 \angle -26.565^\circ \text{ A}$$

- 1.4 En el circuito de la Figura 1.18, en régimen estacionario sinusoidal, obtener el valor de las intensidades en los dos generadores,  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$ , y la intensidad  $\bar{I}_{c1}$  en la impedancia de  $j5 \Omega$ .

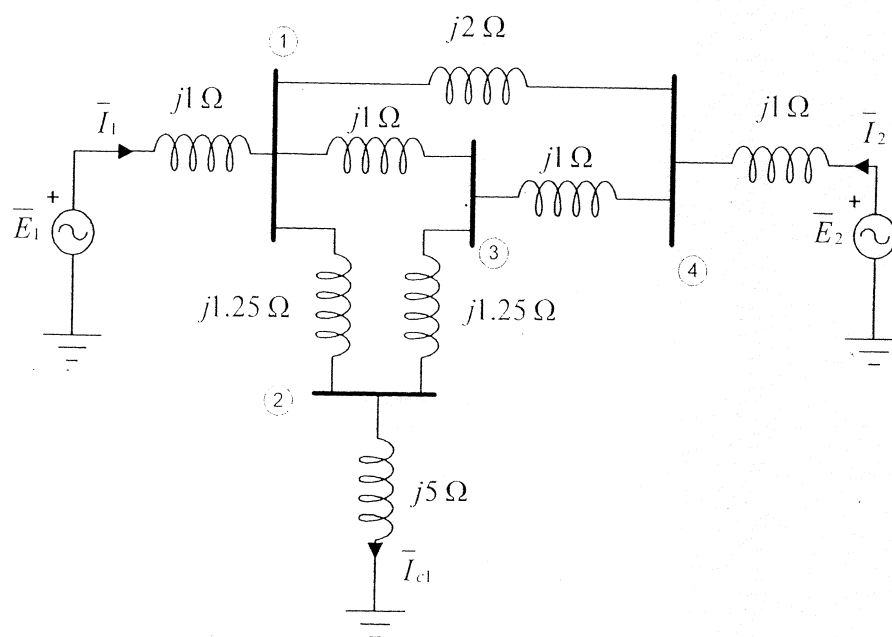


Figura 1.18. Circuito eléctrico del problema 1.4

Datos:  $\bar{E}_1 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $\bar{E}_2 = 100 \angle -5^\circ \text{ V}$ .

**RESOLUCIÓN.**

Se aplicará el método de análisis de nudos (método de los nudos del Apartado 1.3.6). Escribiendo directamente la matriz de admitancias de nudo tenemos:

$$[\bar{Y}_{bus}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{j1} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{j1.25} & -\frac{1}{j1.25} & -\frac{1}{j1} & -\frac{1}{j2} \\ -\frac{1}{j1.25} & \frac{2}{j1.25} + \frac{1}{j5} & -\frac{1}{j1.25} & 0 \\ -\frac{1}{j1} & -\frac{1}{j1.25} & \frac{2}{j1} + \frac{1}{j1.25} & -\frac{1}{j1} \\ -\frac{1}{j2} & 0 & -\frac{1}{j1} & \frac{2}{j1} + \frac{1}{j2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -j3.3 & j0.8 & j1 & j0.5 \\ j0.8 & -j1.8 & j0.8 & 0 \\ j1 & j0.8 & -j2.8 & j1 \\ j0.5 & 0 & j1 & -j2.5 \end{bmatrix} \Omega^{-1}$$

El vector de intensidades de alimentación de nudo sólo presenta valores no nulos en las filas 1 y 4, ya que sólo en esos nudos hay conectadas fuentes. Las fuentes conectadas son de tensión y la transformación a fuente de intensidad hace que dicho valor de intensidad corresponda al valor de la tensión de la fuente dividido por la impedancia. Así:

$$[\bar{I}] = \begin{bmatrix} \frac{\bar{E}_1}{j1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\bar{E}_2}{j1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j100 \\ 0 \\ 0 \\ -8.72 - j99.62 \end{bmatrix} \text{ A}$$

El cálculo del vector de las tensiones de nudo se realiza multiplicando la inversa de la matriz de admittancias de nudo por el vector de intensidades de alimentación de nudo.

$$\begin{aligned} [\bar{U}] &= [\bar{Y}_{bus}]^{-1} [\bar{I}] = \begin{bmatrix} j0.6021 & j0.4712 & j0.4581 & j0.3037 \\ j0.4712 & j1.0209 & j0.5759 & j0.3246 \\ j0.4581 & j0.5759 & j0.8377 & j0.4267 \\ j0.3037 & j0.3246 & j0.4267 & j0.6314 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j100 \\ 0 \\ 0 \\ -8.72 - j99.62 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 90.4604 - j2.6466 \\ 79.4576 - j2.8291 \\ 88.3193 - j3.7189 \\ 93.2676 - j5.5031 \end{bmatrix} \text{ V} \end{aligned}$$

Una vez determinadas las tensiones en cada nudo (con respecto al nudo de referencia), las intensidades pedidas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{\bar{E}_1 - \bar{U}_1}{j1} = 2.6466 - j9.5396 = 9.9 \angle -74.49^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{E}_2 - \bar{U}_4}{j1} = -3.2124 - j6.3519 = 7.118 \angle -116.83^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_{c1} &= \frac{\bar{U}_2}{j5} = -0.5658 - j15.8915 = 15.902 \angle -92.04^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

► 1.5 Obtener el equivalente Thévenin para el nudo 3 del circuito de la Figura 1.18.

**RESOLUCIÓN.**

Si cortocircuitamos las dos fuentes de tensión en el circuito de la Figura 1.18 (problema 1.4), las reactancias del circuito quedan con la disposición mostrada en la Figura 1.19, donde se ha consignado la posición de los nudos del 1 al 4.

Si transformamos (a triángulo) la estrella formada por las tres reactancias conectadas al nudo 4, nos queda el circuito representado en la Figura 1.20, en la que el nudo 4 desaparece como consecuencia de esta transformación. Los valores de estas impedancias vienen dados por:

$$\bar{Z}_{13} = j2 + j1 + \frac{j2 \cdot j1}{j1} = j5 \Omega, \quad \bar{Z}_{01} = j2 + j1 + \frac{j2 \cdot j1}{j1} = j5 \Omega, \quad \bar{Z}_{03} = j1 + j1 + \frac{j1 \cdot j1}{j2} = j2.5 \Omega$$

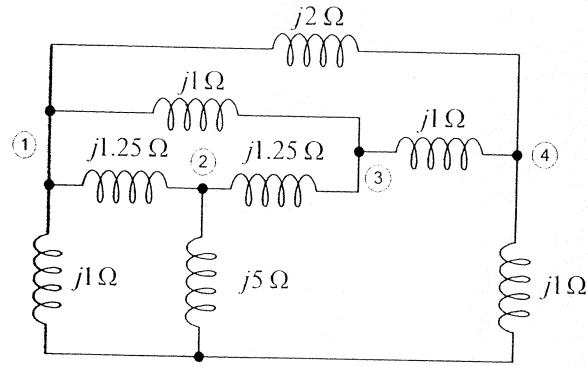


Figura 1.19. Aspecto del circuito de la Figura 1.18 tras cortocircuitar las fuentes de tensión

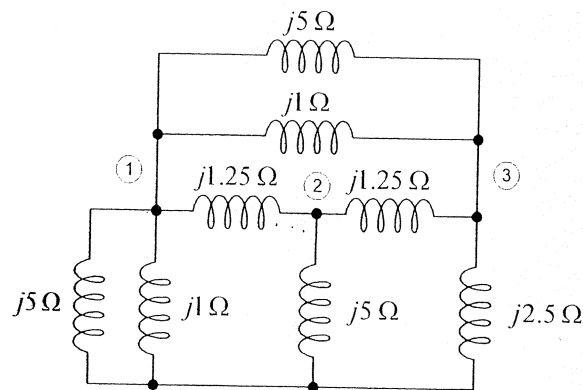


Figura 1.20. Aspecto del circuito tras eliminar el nudo 4

Si ahora transformamos (a triángulo) la estrella formada por las tres reactancias conectadas al nudo 2, nos queda el circuito de la Figura 1.21, desapareciendo este nudo 2, y quedando sólo los nudos 1 y 3, además del nudo de referencia. Las impedancias del nuevo triángulo equivalente ( $\bar{Z}_{01}^a$ ,  $\bar{Z}_{03}^a$  y  $\bar{Z}_{13}^a$ ) tienen por valor:

$$\bar{Z}_{01}^a = j5 + j1.25 + \frac{j5 \cdot j1.25}{j1.25} = j11.25 \Omega$$

$$\bar{Z}_{03}^a = j5 + j1.25 + \frac{j5 \cdot j1.25}{j1.25} = j11.25 \Omega$$

$$\bar{Z}_{13}^a = j1.25 + j1.25 + \frac{j1.25 \cdot j1.25}{j5} = j2.8125 \Omega$$

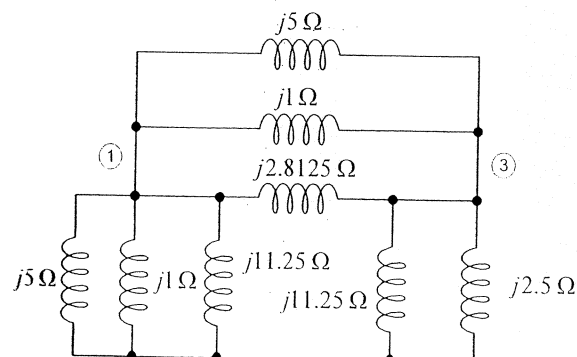


Figura 1.21. Aspecto del circuito tras eliminar el nudo 2

Si ahora calculamos la reactancia equivalente para las tres reactancias entre los nudos 1 y 3, al igual que para las tres reactancias entre el nudo 1 y el de referencia, y para las dos reactancias entre el nudo 3 y el de referencia, el circuito queda tal y como refleja la Figura 1.22.

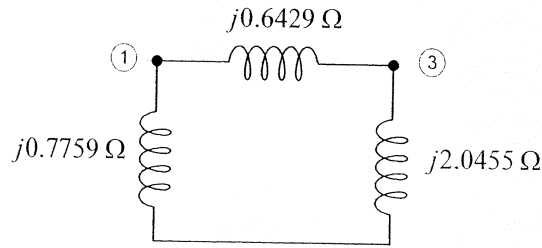


Figura 1.22. Aspecto del circuito tras simplificar las ramas en paralelo

Dado que estamos determinando el equivalente Thévenin para el nudo 3 (es decir, entre el nudo 3 y el de referencia), las dos reactancias conectadas al nudo 1 pueden reducirse a su equivalente al estar conectadas en serie vistas desde el nudo 3. Esta última reactancia equivalente está en paralelo con la de 2.0455 Ω, por lo que pueden reducirse a la correspondiente reactancia equivalente, dando un valor de 0.8377 Ω.

El equivalente Thévenin queda así formado por la reactancia de 0.8377 Ω correspondiente a la impedancia vista entre los nudos 3 y de referencia y una fuente de tensión de valor igual a la tensión a circuito abierto entre los nudos 3 y de referencia, siendo este último valor el calculado como tensión del nudo 3,  $\bar{U}_3$ , en el circuito del problema anterior. Con esto, el equivalente Thévenin queda como muestra la Figura 1.23.

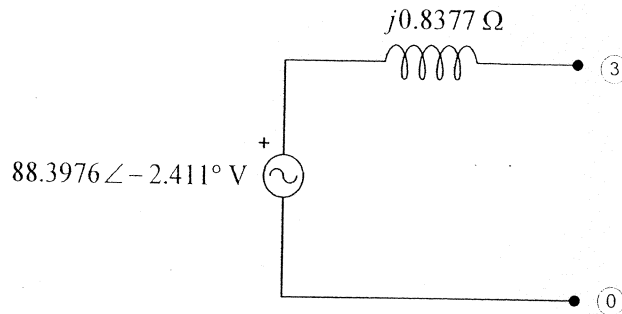


Figura 1.23. Equivalente Thévenin

- 1.6 Dado el circuito trifásico de la Figura 1.24, trabajando en régimen estacionario sinusoidal y alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibradas de secuencia directa, determinar la capacidad por fase de la batería de condensadores a conectar en triángulo de forma que el factor de potencia del circuito sea 0.98 inductivo.

Datos:  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$ ,  $L_2 = 25 \text{ mH}$ ,  $U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = 380 \text{ V}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ .

**RESOLUCIÓN.**

Calculamos, en primer lugar, las potencias activa y reactiva del conjunto de las dos cargas trifásicas, sin necesidad de transformar ninguna de ellas de triángulo a estrella o viceversa. La potencia activa total será la suma de la potencia activa de la carga en estrella más la potencia activa de la carga en triángulo. Denominando a la carga en estrella con subíndice 1, y a la carga en triángulo con subíndice 2:

$$P = P_1 + P_2 = 3 \frac{|\bar{U}_{an}|^2}{R_1} + 3 |\bar{U}_{ab}| |\bar{I}_{ab}| \cos \varphi_2 = 3 \frac{U_{an}^2}{R_1} + 3 U_{ab} \frac{U_{ab} R_2}{Z_2^2}$$

$$U_{ab} = \sqrt{3} U_{an}$$

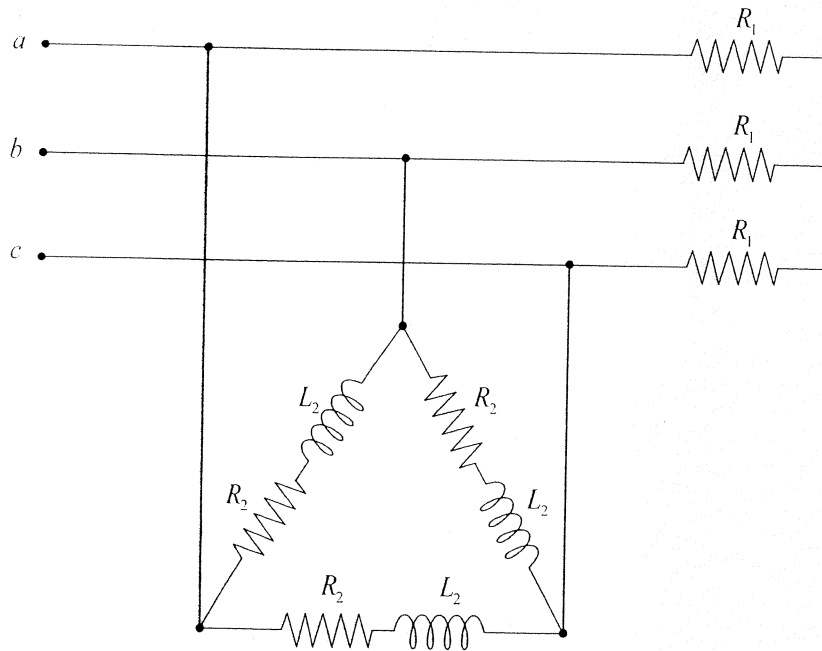


Figura 1.24. Circuito eléctrico del problema 1.6

El módulo de la impedancia por fase de la carga en triángulo viene dado por:

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2} = 9.8836 \Omega$$

donde  $\omega$  es la pulsación ( $\omega = 2\pi f$ ). Sustituyendo, queda un valor de potencia activa  $P$  de 33 828 W.

La potencia reactiva  $Q$  se calcula de manera análoga:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0 + 3|\bar{U}_{ab}||\bar{I}_{ab}|\sin\varphi_2 = 0 + 3U_{ab}\frac{U_{ab}}{Z_2}\frac{\omega L_2}{Z_2} = 34829.7 \text{ VAR}$$

En este caso la potencia reactiva de la carga en estrella es nula al estar constituida sólo por resistencias. El cálculo del factor de potencia del circuito trifásico se determina como el cociente entre la potencia activa total y la potencia aparente total.

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = 0.6967$$

El factor de potencia total es de tipo inductivo, al ser el signo de potencia reactiva total positivo. La mejora del factor de potencia se realizará añadiendo una batería de condensadores (tal y como indica el enunciado del problema), que al presentar una potencia reactiva negativa reducirá el valor de la potencia reactiva total. La potencia activa, sin embargo, no sufre variación al añadir la batería de condensadores. Designando como  $Q'$  a la nueva potencia reactiva total tras añadir la batería de condensadores, y como  $\cos\varphi'$  al nuevo factor de potencia, los triángulos de potencias antes y después de la colocación de la batería de condensadores son los reflejados en la Figura 1.25.

La nueva potencia reactiva,  $Q'$ , puede calcularse a partir de la potencia activa, y además la nueva potencia reactiva será la suma algebraica de la existente inicialmente más la de la batería de condensadores,  $Q_c$ .

$$Q' = P \operatorname{tg}\varphi'$$

$$Q' = Q + Q_c \Rightarrow Q_c = Q' - Q$$

$$Q_c = P \operatorname{tg}\varphi' - Q = 33828 \operatorname{tg}(\arccos 0.98) - 34829.7 = -27960.7 \text{ VAR}$$

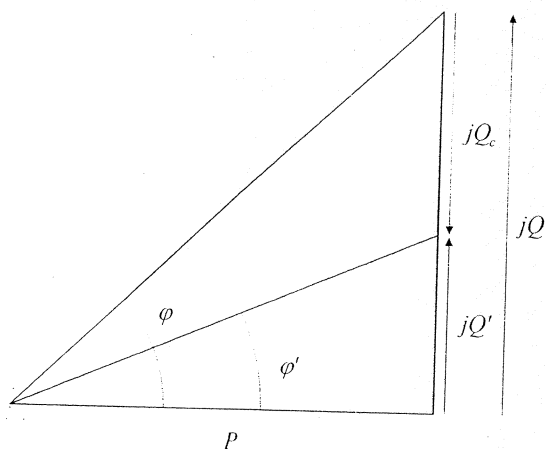


Figura 1.25. Triángulo de potencias

El valor de la capacidad de los condensadores se puede calcular teniendo en cuenta que la potencia reactiva de la batería es tres veces la de una de las fases.

$$Q_c = -3U_{ab}^2 \omega C \Rightarrow C = \frac{27960.7}{3 \cdot 380^2 \cdot 100 \cdot \pi} = 205.45 \mu\text{F}$$

- 1.7 Dado el circuito trifásico equilibrado de la Figura 1.26, trabajando en régimen estacionario sinusoidal, obtener las potencias activa, reactiva y aparente de cada carga y el factor de potencia de todo el circuito. El circuito está alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibradas de secuencia directa.

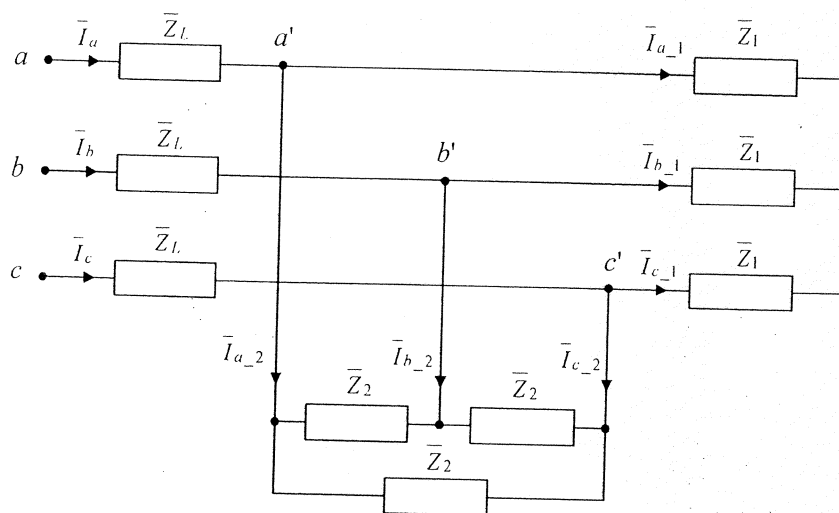


Figura 1.26. Circuito eléctrico del problema 1.7

Datos:  $\bar{Z}_L = 0.4 + j0.2 \Omega$ ,  $\bar{Z}_1 = 10 + j8 \Omega$ ,  $\bar{Z}_2 = 15 - j9 \Omega$ ,  $U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = 400 \text{ V}$ .

**RESOLUCIÓN.**

Se va a plantear la resolución de este problema por dos métodos distintos: por análisis del circuito monofásico equivalente y por componentes simétricas.

Inicialmente transformamos la carga de impedancia  $\bar{Z}_2$ , que está conectada en triángulo, a la carga equivalente en estrella, cuya impedancia por fase será  $\bar{Z}_{2Y}$  y que tiene por valor un tercio de la impedancia  $\bar{Z}_2$ . Analizando el circuito monofásico equivalente para la primera de las fases, *a* (Figura 1.27), podemos calcular la intensidad  $\bar{I}_a$  reduciendo las impedancias en paralelo  $\bar{Z}_1$  y  $\bar{Z}_{2Y}$  a su equivalente y resolviendo la malla



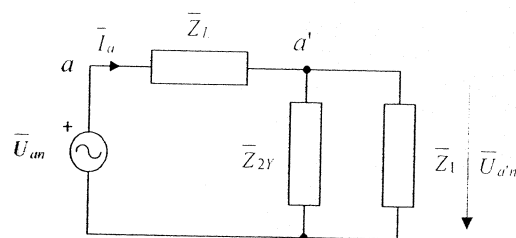


Figura 1.27. Circuito monofásico equivalente

resultante. Denominamos  $\bar{Z}_c$  a la impedancia equivalente a las dos en paralelo, y tomamos la tensión entre terminales  $a$  y  $b$  con fase inicial nula.

Dando fase inicial nula a la tensión  $\bar{U}_{ab}$ ,  $\bar{U}_{ab} = 400 \angle 0^\circ$  V, resulta que  $\bar{U}_{an} = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ$  V.

$$\frac{1}{\bar{Z}_c} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_{2Y}} = 0.2080 + j0.0395 \Omega^{-1} \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_c = 4.64 - j0.88 \Omega$$

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{U}_{an}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c} = \frac{200 - j115.47}{5.0400 - j0.6800} = 42.009 - j17.243 = 45.41 \angle -22.316^\circ \text{ A}$$

Una vez determinada la intensidad en la fase  $a$ , la tensión  $\bar{U}_{a'n}$  puede calcularse como el producto de la impedancia  $\bar{Z}_c$  y la intensidad  $\bar{I}_a$ :

$$\bar{U}_{a'n} = \bar{Z}_c \bar{I}_a = 179.75 - j116.97 = 214.46 \angle -33.055^\circ \text{ V}$$

El módulo de la tensión  $\bar{U}_{a'n}$  corresponde a la tensión de fase de las cargas, consideradas las dos conectadas en estrella. Ahora podemos calcular las potencias activa, reactiva y aparente en cada carga como:

$$P_1 = 3 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\bar{Z}_1} \right\} |\bar{U}_{a'n}|^2 = 3 \cdot 0.061 \cdot 214.46^2 = 8413.2 \text{ W}$$

$$Q_1 = -3 \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\bar{Z}_1} \right\} |\bar{U}_{a'n}|^2 = -3 \cdot (-0.0488) \cdot 214.46^2 = 6730.6 \text{ VAR}$$

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 10774 \text{ VA}$$

$$P_2 = 3 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\bar{Z}_{2Y}} \right\} |\bar{U}_{a'n}|^2 = 3 \cdot 0.1471 \cdot 214.46^2 = 20291 \text{ W}$$

$$Q_2 = -3 \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\bar{Z}_{2Y}} \right\} |\bar{U}_{a'n}|^2 = -3 \cdot (0.0882) \cdot 214.46^2 = -12174 \text{ VAR}$$

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = 23663 \text{ VA}$$

Para poder calcular las potencias activa, reactiva y aparente del circuito trifásico, incluyendo las impedancias  $\bar{Z}_L$ , debemos calcular las potencias activa y reactiva en ellas.

$$P_L = 3R_L I_a^2 = 3 \cdot 0.4 \cdot 45.41^2 = 2474.5 \text{ W}$$

$$Q_L = 3X_L I_a^2 = 3 \cdot 0.2 \cdot 45.41^2 = 1237.2 \text{ VAR}$$

Las potencias activa y reactiva del circuito trifásico, así como la potencia aparente y el factor de potencia correspondiente, son:

$$P = P_1 + P_2 + P_L = 31179 \text{ W}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_L = -4206.2 \text{ VAR}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 31461 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = 0.991 \text{ capacitivo}$$

Resolveremos de nuevo el problema por el método de las componentes simétricas. Para este método necesitamos calcular las tres redes de secuencia: la directa, la inversa y la homopolar. En cada una de estas redes determinaremos las intensidades en cada carga y en la línea, calculando posteriormente las potencias activa, reactiva y aparente.

La red de secuencia directa es la representada en la Figura 1.28.

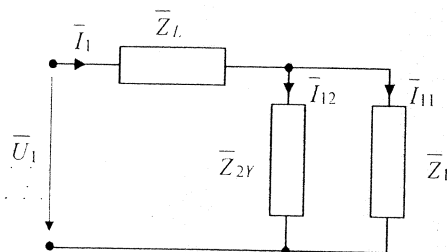


Figura 1.28. Red de secuencia directa

Si  $\bar{U}_{ab} = 400 \angle 0^\circ$  V, al ser el sistema de tensiones equilibrado de secuencia directa, la tensión  $\bar{U}_1$  de la red de secuencia directa coincide con el valor de la tensión  $\bar{U}_{an}$ .

Como  $\bar{U}_{ab} = 400 \angle 0^\circ$  V, resulta que  $\bar{U}_{an} = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ$  V.

$$\bar{U}_1 = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 200 - j115.47$$

Así, de la red de secuencia directa resulta que

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c} = \frac{200 - j115.47}{5.0400 - j0.6800} = 42.009 - j17.243 = 45.41 \angle -22.316^\circ \text{ A}$$

Las intensidades en  $\bar{Z}_1$  y  $\bar{Z}_{2Y}$  se pueden calcular por medio de divisores de intensidad.

$$\bar{I}_{11} = \frac{\frac{1}{\bar{Z}_1}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_{2Y}}} \bar{I}_1 = \frac{0.0610 - j0.0488}{0.2080 + j0.0395} \bar{I}_1 = 5.2542 - j15.901 = 16.746 \angle -71.715^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_{12} = \frac{\frac{1}{\bar{Z}_{2Y}}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_{2Y}}} \bar{I}_1 = \frac{0.1471 + j0.0882}{0.2080 + j0.0395} \bar{I}_1 = 36.755 - j1.3421 = 36.779 \angle -2.0911^\circ \text{ A}$$

La red de secuencia inversa es la representada en la Figura 1.29, donde, al ser nula la tensión  $\bar{U}_2$ , tanto la intensidad en la línea  $\bar{I}_2$ , como las intensidades en las cargas  $\bar{I}_{21}$  y  $\bar{I}_{22}$  son nulas. Recuérdese que el sistema trifásico de tensiones  $\bar{U}_{ab}$ ,  $\bar{U}_{bc}$  y  $\bar{U}_{ca}$  es equilibrado y de secuencia directa.

$$\bar{U}_2 = 0 \text{ V}, \quad \bar{I}_2 = \bar{I}_{21} = \bar{I}_{22} = 0$$

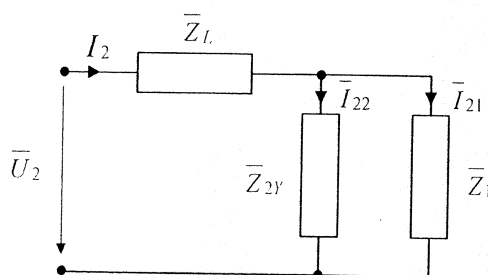


Figura 1.29. Red de secuencia inversa

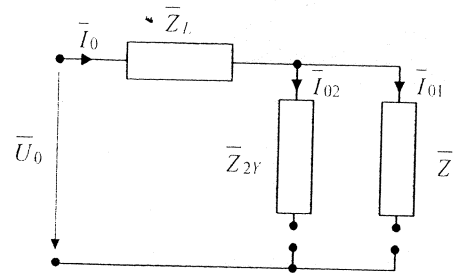


Figura 1.30. Red de secuencia homopolar

La red de secuencia homopolar se incluye en la Figura 1.30. Obviamente las intensidades  $\bar{I}_0$ ,  $\bar{I}_{01}$  e  $\bar{I}_{02}$  son nulas. Asimismo  $\bar{U}_0 = 0$  (sistema trifásico de tensiones  $\bar{U}_{ab}$ ,  $\bar{U}_{bc}$  y  $\bar{U}_{ca}$  equilibrado y de secuencia directa).

Una vez determinadas las componentes simétricas de las intensidades, podemos calcular las intensidades en el circuito original.

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42.009 - j17.243 \\ -35.937 - j27.759 \\ -6.0717 + j45.002 \end{bmatrix} \text{ A}$$

Análogamente, para las cargas las intensidades las calculamos a partir de sus componentes simétricas.

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{a_1} \\ \bar{I}_{b_1} \\ \bar{I}_{c_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{01} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2542 - j15.901 \\ -16.398 + j3.4002 \\ 11.143 + j12.501 \end{bmatrix} \text{ A}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{a_2} \\ \bar{I}_{b_2} \\ \bar{I}_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{02} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.755 - j1.3421 \\ -19.540 - j31.160 \\ -17.215 + j32.502 \end{bmatrix} \text{ A}$$

Las intensidades en las tres fases para cada una de las cargas forman un sistema equilibrado (igual módulo y desfase entre ellas de  $120^\circ$ ), por lo que podemos calcular la potencia activa, reactiva y aparente de cada carga tomando el valor eficaz de las intensidades en la fase  $a$ , por ejemplo.

$$P_1 = 3R_1 |\bar{I}_{a_1}|^2 = 3 \cdot 10 \cdot |\bar{I}_{a_1}|^2 = 8413.2 \text{ W}$$

$$Q_1 = 3X_1 |\bar{I}_{a_1}|^2 = 3 \cdot 8 \cdot |\bar{I}_{a_1}|^2 = 6730.6 \text{ VAR}$$

$$S_1 = 3Z_1 |\bar{I}_{a_1}|^2 = 3 \cdot |\bar{Z}_1| \cdot |\bar{I}_{a_1}|^2 = 10774 \text{ VA}$$

$$P_2 = 3R_{2Y} |\bar{I}_{a_2}|^2 = 3 \cdot 5 \cdot |\bar{I}_{a_2}|^2 = 20291 \text{ W}$$

$$Q_2 = 3X_{2Y} |\bar{I}_{a_2}|^2 = 3 \cdot (-3) \cdot |\bar{I}_{a_2}|^2 = -12174 \text{ VAR}$$

$$S_2 = 3Z_{2Y} |\bar{I}_{a_2}|^2 = 3 \cdot |\bar{Z}_{2Y}| \cdot |\bar{I}_{a_2}|^2 = 23663 \text{ VA}$$

Las potencias activa y reactivas consumidas por la tres impedancias  $\bar{Z}_L$  serán:

$$P_L = 3R_L |\bar{I}_a|^2 = 3 \cdot 0.4 \cdot |\bar{I}_a|^2 = 2474.5 \text{ W}$$

$$Q_L = 3X_L |\bar{I}_a|^2 = 3 \cdot 0.2 \cdot |\bar{I}_a|^2 = 1237.2 \text{ VAR}$$

Las potencias activa y reactiva del circuito trifásico, así como la potencia aparente y el factor de potencia, son:

$$P = P_1 + P_2 + P_L = 31179 \text{ W}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_L = -4206.2 \text{ VAR}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 31461 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = 0.991 \text{ capacitivo}$$

De esta manera, en este problema se ilustra que el método de las componentes simétricas en circuitos trifásicos con simetría, alimentados por sistemas trifásicos equilibrados de tensiones de secuencia directa en régimen estacionario sinusoidal, lleva a que únicamente aparecen valores no nulos de las componentes simétricas de secuencia directa de tensión e intensidad (en la red de secuencia directa), siendo la red de secuencia directa igual al equivalente monofásico.

- **1.8** Dado el circuito trifásico de la Figura 1.31, en régimen estacionario sinusoidal y alimentado por un sistema de tensiones trifásicas desequilibradas, determinar las intensidades  $\bar{I}_a, \bar{I}_b, \bar{I}_c, \bar{I}_{a_1}, \bar{I}_{b_1}, \bar{I}_{c_1}, \bar{I}_{a_2}, \bar{I}_{b_2}$  e  $\bar{I}_{c_2}$ .

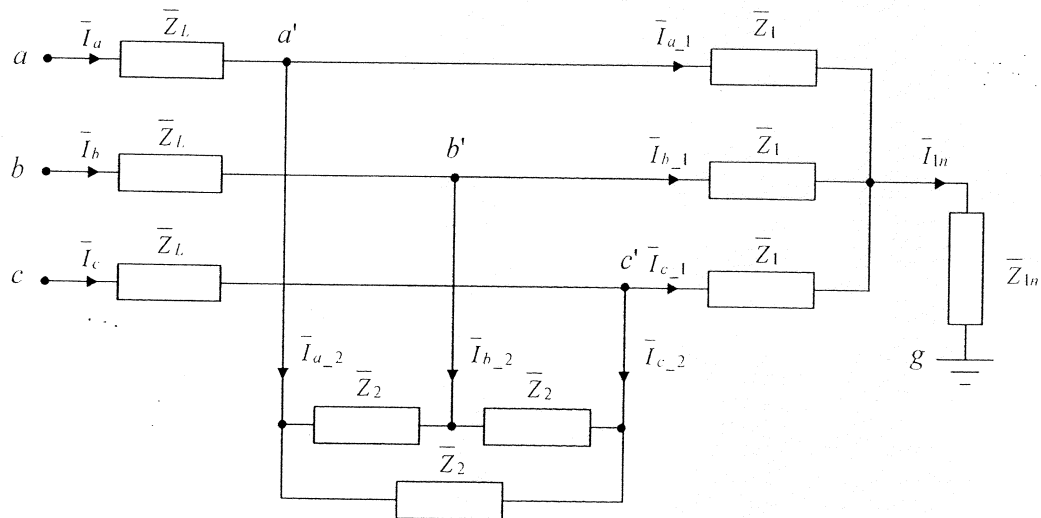


Figura 1.31. Circuito eléctrico del problema 1.8

Datos:  $\bar{U}_{ag} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $\bar{U}_{bg} = 220 \angle -120^\circ \text{ V}$ ,  $\bar{U}_{cg} = 200 \angle 100^\circ \text{ V}$ ,  
 $\bar{Z}_L = 0.2 + j0.4 \Omega$ ,  $\bar{Z}_1 = 8 + j10 \Omega$ ,  $\bar{Z}_2 = 30 + j18 \Omega$ ,  $\bar{Z}_{0n} = j10 \Omega$ .

**RESOLUCIÓN.**

Al tratarse de un circuito trifásico alimentado por tensiones desequilibradas resolveremos el problema aplicando las componentes simétricas. La red de secuencia directa corresponde al circuito presentado en la Figura 1.32, en la que calcularemos inicialmente la impedancia equivalente a la de las dos cargas en paralelo,  $\bar{Z}_c$ , para determinar después fácilmente la intensidad  $\bar{I}_1$  y a continuación las intensidades  $\bar{I}_{11}$  e  $\bar{I}_{12}$  por medio de divisores de intensidad.

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{3} [\bar{U}_{ag} + a\bar{U}_{bg} + a^2\bar{U}_{cg}] = 209.31 - j22.801 \text{ V}$$

$$\frac{1}{\bar{Z}_c} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\frac{\bar{Z}_2}{3}} = 0.1223 - j0.1051 \Omega^{-1} \Rightarrow \bar{Z}_c = 4.7034 + j4.0414 \Omega$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c} = 21.1353 - j23.7937 \text{ A}$$

$$\bar{I}_{11} = \frac{\frac{1}{\bar{Z}_1}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\frac{\bar{Z}_2}{3}}} \bar{I}_1 = (0.4759 - j0.0897) (21.1353 - j23.7937) = 7.9243 - j13.217 \text{ A}$$

$$\bar{I}_{12} = \frac{\frac{1}{\frac{\bar{Z}_2}{3}}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\frac{\bar{Z}_2}{3}}} \bar{I}_1 = (0.5241 + j0.0897) (21.1353 - j23.7937) = 13.211 - j10.576 \text{ A}$$

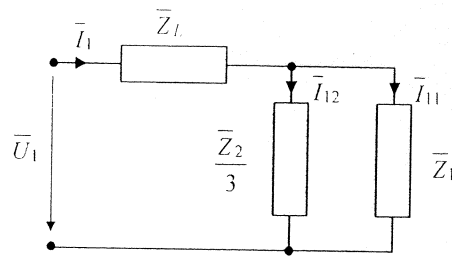


Figura 1.32. Red de secuencia directa

La red de secuencia inversa es similar a la red de secuencia directa, pero la tensión aplicada es en este caso  $\bar{U}_2$ . Denominando de nuevo  $\bar{Z}_c$  a la impedancia equivalente a la de  $\bar{Z}_1$  y  $\bar{Z}_2/3$  en paralelo, podemos calcular la intensidad  $\bar{I}_2$ .

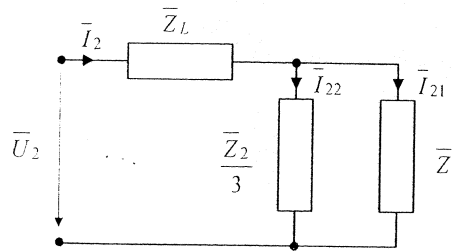


Figura 1.33. Red de secuencia inversa

$$\bar{U}_2 = \frac{1}{3} [\bar{U}_{ag} + a^2 \bar{U}_{bg} + a \bar{U}_{cg}] = -14.403 + j20.656 \text{ V}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c} = 0.4825 + j3.7756 \text{ A}$$

$$\bar{I}_{21} = \frac{\frac{1}{\bar{Z}_1}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2/3}} \bar{I}_2 = (0.4759 - j0.0897)(0.4825 + j3.7756) = 0.5681 + j1.7534 \text{ A}$$

$$\bar{I}_{22} = \frac{\frac{1}{\bar{Z}_2/3}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2/3}} \bar{I}_2 = (0.5241 + j0.0897)(0.4825 + j3.7756) = -0.0856 + j2.0222 \text{ A}$$

La red de secuencia homopolar presenta como características diferenciadoras respecto a las otras dos redes de secuencia el hecho de que la impedancia de la carga en triángulo queda abierta y que aparece, en serie con la impedancia de la carga en estrella, el triple de su impedancia de conexión del neutro.

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{3} [\bar{U}_{ag} + \bar{U}_{bg} + \bar{U}_{cg}] = 25.0901 + j2.1453 \text{ V}$$

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{U}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_1 + 3\bar{Z}_{1n}} = 0.1721 - j0.5861 \text{ A}$$

$$\bar{I}_{01} = \bar{I}_0$$

$$\bar{I}_{02} = 0$$

Las intensidades buscadas se pueden calcular a partir de las componentes simétricas.

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.790 - j20.604 \\ -34.512 - j8.4629 \\ 13.239 + j27.309 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.989 \angle -43.398^\circ \\ 35.535 \angle -166.22^\circ \\ 30.349 \angle 64.137^\circ \end{bmatrix} \text{ A}$$

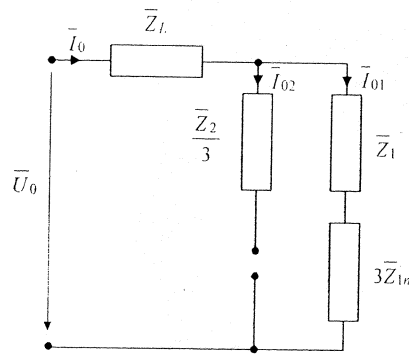


Figura 1.34. Red de secuencia homopolar

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{a-1} \\ \bar{I}_{b-1} \\ \bar{I}_{c-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{01} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6644 - j12.050 \\ -17.039 - j1.2247 \\ 8.8910 + j11.516 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.842 \angle -54.283^\circ \\ 17.083 \angle -175.89^\circ \\ 14.549 \angle 52.331^\circ \end{bmatrix} \text{ A}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{a-2} \\ \bar{I}_{b-2} \\ \bar{I}_{c-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{02} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.125 - j8.5541 \\ -17.473 - j7.2382 \\ 4.3479 + j15.792 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.667 \angle -33.093^\circ \\ 18.913 \angle -157.50^\circ \\ 16.380 \angle 74.607^\circ \end{bmatrix} \text{ A}$$

- 1.9 En el circuito trifásico de la Figura 1.35, en régimen estacionario sinusoidal, las tensiones aplicadas a los terminales  $a, b$  y  $c$  forman un sistema trifásico equilibrado de secuencia directa, siendo  $|\bar{U}_{anG}| = |\bar{U}_{bnG}| = |\bar{U}_{cnG}| = 400/\sqrt{3}$  V. Obtener las componentes simétricas del sistema de tensiones  $\bar{U}_{a'nG}, \bar{U}_{b'nG}$  y  $\bar{U}_{c'nG}$ , y del sistema de intensidades  $\bar{I}_a, \bar{I}_b$  e  $\bar{I}_c$ .

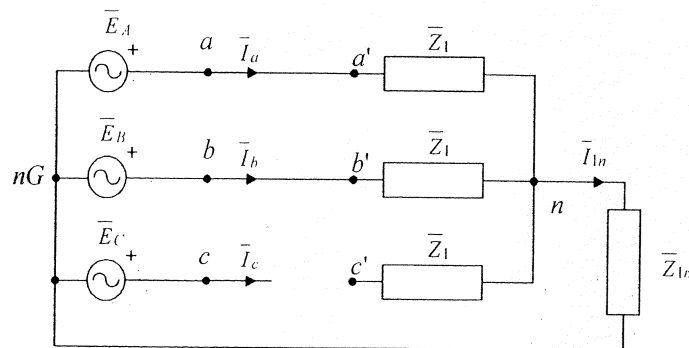


Figura 1.35. Circuito eléctrico del problema 1.9

Datos:  $\bar{U}_{ab} = 400 \angle 0^\circ$  V,  $\bar{Z}_1 = 10 \angle 30^\circ \Omega$ ,  $\bar{Z}_{1n} = 0.5 \angle 45^\circ \Omega$ .

**RESOLUCIÓN.**

En primer lugar se calcula la tensión  $\bar{U}_{nnG}$ , que es la existente entre el punto de neutro de la carga,  $n$ , y el neutro del generador,  $nG$ . Esta tensión se va a calcular por dos métodos distintos, por aplicación del método de los nudos y por aplicación del teorema de Thévenin. Las tensiones de los generadores  $\bar{E}_A$  y  $\bar{E}_B$  se pueden calcular a partir de los datos del problema como:

$$\bar{E}_A = \bar{U}_{anG} = \bar{U}_{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 230.94 \angle -30^\circ \text{ V}$$

$$\bar{E}_B = \bar{U}_{bnG} = \bar{U}_{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ = 230.94 \angle -150^\circ \text{ V}$$

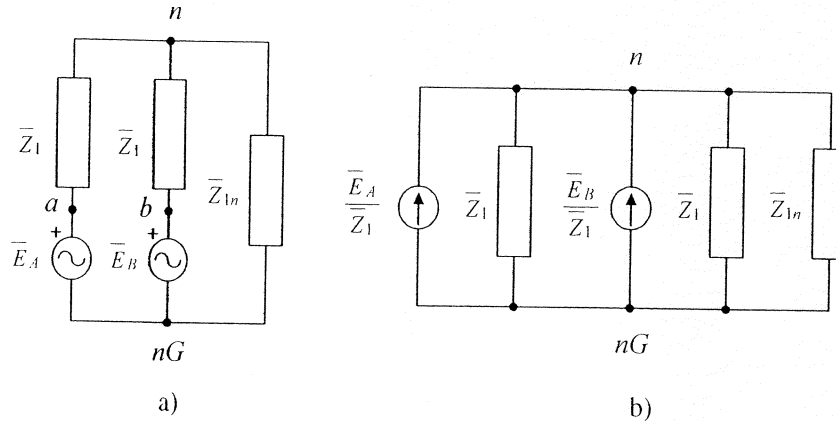


Figura 1.36. a) Circuito original. b) Circuito con fuentes de tensión transformadas en fuentes de intensidad

Si tenemos en cuenta que la fase  $c$  está abierta, el circuito original es equivalente al presentado en la Figura 1.36 a), y al transformar las dos fuentes de tensión en su equivalente fuente de intensidad, el circuito queda tal como se ha reflejado en la Figura 1.36 b).

Al aplicar el método de los nudos al nudo  $n$  y tomando el nudo  $nG$  como nudo de referencia, se obtiene la ecuación:

$$\bar{U}_{nG} \left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_{1n}} \right) = \frac{\bar{E}_A}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_B}{\bar{Z}_1}$$

y despejando el valor de  $\bar{U}_{nG}$ :

$$\bar{U}_{nG} = \frac{\frac{\bar{E}_A}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_B}{\bar{Z}_1}}{\frac{2}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_{1n}}} = \frac{(11.547 - j20) + (-23.094 + j0)}{(0.1732 - j0.1) + (1.4142 - j1.4142)} = 2.4839 - j10.23 \text{ V}$$

Al mismo valor podríamos haber llegado por aplicación del teorema de Thévenin, por ejemplo, si obtenemos el equivalente Thévenin del circuito formado por las fases  $a$  y  $b$  entre los terminales  $n$  y  $nG$  (Figura 1.37 a)); con este equivalente Thévenin y la impedancia  $\bar{Z}_{1n}$  podemos calcular la tensión  $\bar{U}_{nG}$  (Figura 1.37 b)).

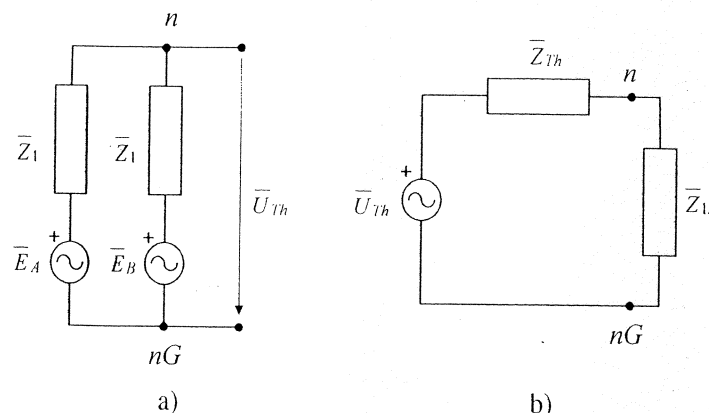


Figura 1.37. a) Circuito del que se calcula su equivalente Thévenin. b) Circuito en el que se calcula la tensión entre los terminales  $n$  y  $nG$

La tensión del equivalente Thévenin del circuito de la Figura 1.37 a) se puede calcular por aplicación del método de los nudos:

$$\bar{U}_{Th} \left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_1} \right) = \frac{\bar{E}_A}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_B}{\bar{Z}_1}$$

$$\bar{U}_{Th} = \frac{\frac{\bar{E}_A}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_B}{\bar{Z}_1}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_1}} = \frac{(11.547 - j20) + (-23.094 + j0)}{(0.0866 - j0.05) + (0.0866 - j0.05)} = -j115.47 \text{ V}$$

La impedancia  $\bar{Z}_{Th}$  del equivalente Thévenin corresponde a la equivalente al paralelo de dos impedancias de valor  $\bar{Z}_1$ , cuyo valor es la mitad de  $\bar{Z}_1$ .

Y en el circuito de la Figura 1.37 b) se puede calcular la tensión entre  $n$  y  $nG$  por medio de un divisor de tensión:

$$\bar{U}_{nnG} = \frac{\bar{Z}_{1n}}{\bar{Z}_{Th} + \bar{Z}_{1n}} \bar{U}_{Th} = \frac{0.3536 + j0.3536}{4.6837 + j2.8536} = 2.4839 - j10.23 \text{ V}$$

Obviamente, tanto por aplicación del método de los nudos como por aplicación del teorema de Thévenin, se ha obtenido el mismo resultado para la tensión  $\bar{U}_{nnG}$ . Una vez determinada esta tensión, el cálculo de las intensidades en las fases  $a$  y  $b$  es inmediato (la intensidad  $\bar{I}_c$  es nula al estar la fase  $c$  abierta):

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{E}_A - \bar{U}_{nnG}}{\bar{Z}_1} = \frac{197.52 - j105.24}{8.6603 + j5} = 11.843 - j18.99 = 22.38 \angle -58.049^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_b = \frac{\bar{E}_B - \bar{U}_{nnG}}{\bar{Z}_1} = \frac{-202.48 - j105.24}{8.6603 + j5} = -22.798 - j1.0101 = 22.82 \angle 177.46^\circ \text{ A}$$

Las tensiones en los terminales  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  con respecto al terminal  $nG$  son:

$$\bar{U}_{a'nG} = \bar{U}_{anG}, \quad \bar{U}_{b'nG} = \bar{U}_{bnG}, \quad \bar{U}_{c'nG} = \bar{U}_{nnG}$$

$$\bar{U}_{c'nG} = (\bar{I}_a + \bar{I}_b) \bar{Z}_{1n} = (-10.954 - j17.980)(0.3536 + j0.3536) = 2.4839 - j10.23 \text{ V}$$

Una vez determinadas las intensidades y tensiones en la carga, el cálculo de sus componentes simétricas es:

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_0 \\ \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{a'nG} \\ \bar{U}_{b'nG} \\ \bar{U}_{c'nG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.828 - j80.390 \\ 129.97 - j75.992 \\ 69.206 + j40.912 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.394 \angle -89.41^\circ \\ 150.55 \angle -30.315^\circ \\ 80.394 \angle 30.59^\circ \end{bmatrix} \text{ V}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.6514 - j5.9933 \\ 7.4558 - j13.079 \\ 8.039 + j0.0828 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.0180 \angle -121.35^\circ \\ 15.055 \angle -60.315^\circ \\ 8.0394 \angle 0.5901^\circ \end{bmatrix} \text{ A}$$

► 1.10 Obtener las redes de secuencia para el circuito trifásico representado en la Figura 1.38.

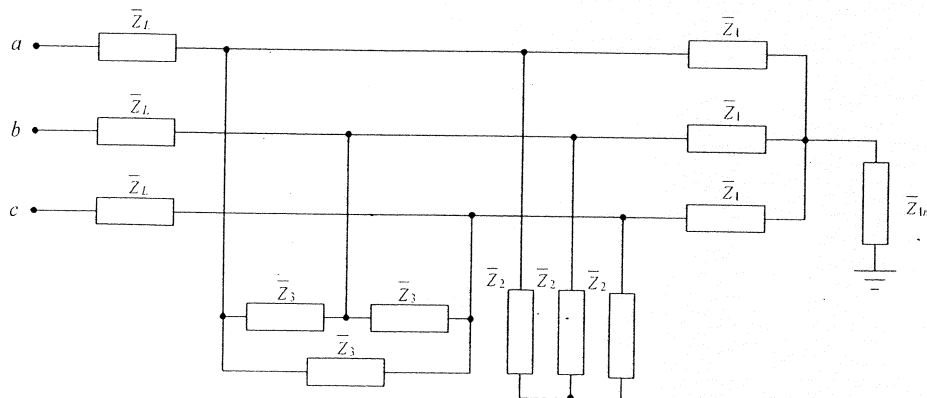


Figura 1.38. Circuito eléctrico del problema 1.10

Datos:  $\bar{Z}_1 = 2 + j2 \Omega$ ,  $\bar{Z}_2 = 4 + j3 \Omega$ ,  $\bar{Z}_3 = 6 - j4.5 \Omega$ ,  $\bar{Z}_L = 0.2 + j0.1 \Omega$ ,  $\bar{Z}_{1n} = j1.5 \Omega$ .



**RESOLUCIÓN.**

Las redes de secuencia del circuito se pueden obtener a partir de los circuitos de secuencia de cada una de las cargas, teniendo en cuenta la topología del circuito trifásico, es decir, si, por ejemplo, dos cargas están en paralelo, sus circuitos de secuencia también lo están.

Así, la red de secuencia directa para el circuito trifásico es la presentada en la Figura 1.39. Sustituyendo los valores numéricos, la red de secuencia directa equivale a una impedancia de  $1.5278 + j0.3364 \Omega$ .

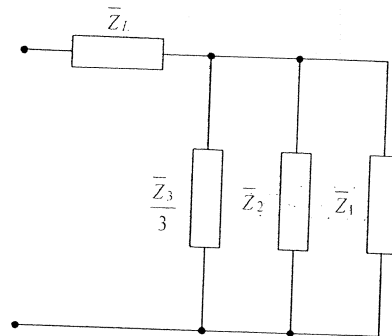


Figura 1.39. Red de secuencia directa (red de secuencia inversa)

La red de secuencia inversa es similar a la red de secuencia directa. Por el contrario, la red de secuencia homopolar presenta abiertas las ramas correspondientes a las cargas de impedancias  $\bar{Z}_2$  y  $\bar{Z}_3$ , al tratarse de cargas conectadas en estrella con neutro aislado y triángulo, respectivamente. La red de secuencia homopolar del circuito es equivalente a una impedancia de  $2.2 + j6.6 \Omega$  (equivalente a las impedancias  $\bar{Z}_L$ ,  $\bar{Z}_1$  y  $3\bar{Z}_{1n}$  en serie).

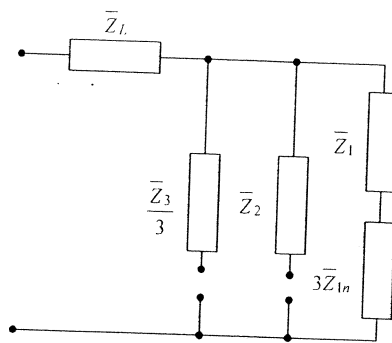


Figura 1.40. Red de secuencia homopolar